

Baccalauréat épreuve de spécialité

Sujet 1

Voie générale – Métropole – 16 juin 2026

A. P. M. E. P.

Exercice 1 (5 points)

Un navire assure la liaison entre deux ports de la Méditerranée.

Lors d'une traversée, une famille a la possibilité de réserver une cabine ainsi qu'un emplacement pour un véhicule.

Partie A

Parmi l'ensemble des familles effectuant la traversée, on constate que 30% réservent un emplacement pour un véhicule et, parmi ces dernières, 80% réservent une cabine.

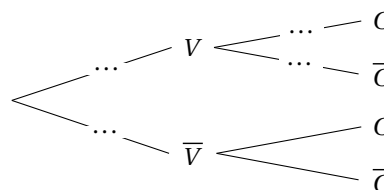
On sait par ailleurs que 75% des familles effectuant la traversée réservent une cabine.

On choisit au hasard une famille effectuant la traversée, et on considère les événements suivants :

- V : « la famille réserve un emplacement pour un véhicule » ;
- C : « la famille réserve une cabine » .

Pour un événement quelconque E , on désigne par \bar{E} son événement contraire et par $P(E)$ sa probabilité.

1. a. Donner $P(C)$.
b. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les quatre pointillés.



2. Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.
3. Une famille a réservé une cabine.
Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.
4. Déterminer $P_{\bar{V}}(C)$.
On arrondira le résultat à 10^{-2} .
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Sur ce trajet, la réservation d'une cabine et d'un emplacement pour un véhicule sont facturés en supplément du coût de la traversée.

Ces suppléments sont d'un montant de :

- 100 € pour une cabine ;
- 70 € pour l'emplacement d'un véhicule.

On suppose qu'une famille peut réserver au maximum une cabine et au maximum un emplacement pour un véhicule.

À ces suppléments peuvent s'ajouter le prix payé pour des extras (repas, boissons, etc.).

On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les suppléments.

On donne ci-dessous la loi de probabilité de X .

x_i	0	70	100	170
$P(X = x_i)$	0,19	0,06	0,51	0,24

On note Y la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les extras.

On admet que la variable aléatoire Y a pour espérance $E(Y) = 104$ et pour variance $V(Y) = 1686$.

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

1. Justifier que $E(X) = 96$ et que $V(X) = 3114$.

2. À titre exceptionnel, la compagnie propose une remise de 40 % sur les suppléments et les extras.

On note Z la variable aléatoire qui, à chaque famille effectuant la traversée, associe le montant total pour les suppléments et les extras, en euro, payé par cette famille après réduction.

a. Justifier que $Z = 0,6(X + Y)$.

b. En déduire que $E(Z) = 120$ et que $V(Z) = 1728$,

où $E(Z)$ est l'espérance de la variable aléatoire Z et $V(Z)$ sa variance.

3. On note n un entier naturel non nul et on choisit au hasard un échantillon de n familles effectuant cette traversée bénéficiant de la réduction exceptionnelle définie en question 2.

On admet que ce choix peut être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par Z_1 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la première famille, Z_2 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la deuxième famille et ainsi de suite, Z_n la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la n -ième famille.

On considère la variable aléatoire $M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}$ donnant le prix total moyen pour les suppléments et les extras, payé par ces familles.

On admet que les variables Z_1, Z_2, \dots, Z_n sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire Z .

a. Montrer que l'espérance $E(M_n)$ de la variable M_n est égale à 120, et que sa variance $V(M_n)$ est égale à $\frac{1728}{n}$.

b. Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que

$$P(114 < M_n < 126) \geq 0,85.$$

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1,5 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R};$$

- les points $A(3; 0; 2)$ et $B(2; 1; -3)$;
- le plan (\mathcal{P}) d'équation : $-x + y - 5z - 0,5 = 0$.

a. Affirmation 1 :

Le plan (\mathcal{P}) est orthogonal à la droite (AB) , et passe par le milieu du segment $[AB]$.

b. Affirmation 2 :

Les droites (d) et (AB) sont sécantes.

- c. On considère le point C de coordonnées $(1,5; -3; -1)$.

Affirmation 3 :

La mesure de l'angle \widehat{ACB} , arrondie à 10^{-1} , est égale à $70,5^\circ$.

2. Titouan et Clotilde participent à un escape game. Ils se retrouvent dans une salle possédant deux portes de sortie, A et B, chacune protégée par un digicode équipé de 8 touches portant des symboles différents :

- le digicode de la porte A utilise un code de 3 symboles différents devant être saisis dans l'ordre;
- celui de la porte B utilise un code de 4 symboles différents qui peuvent être saisis dans n'importe quel ordre.

N'étant pas parvenus à obtenir d'indices, ils décident de procéder au hasard à la saisie des codes. Clotilde choisit un code pour la porte A, et Titouan choisit un code pour la porte B.

On considère que les choix des codes sont équiprobables.

Affirmation 4 :

Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

Exercice 3 (6 points)

On étudie le fonctionnement d'un système de chauffage installé dans une pièce. Ce système se déclenche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18 °C (degrés Celsius), et s'éteint lorsqu'elle atteint 20 °C.

Partie A : Phase de chauffage

Pour une température de la pièce variant de 18 °C à 20 °C, le système de chauffage fonctionne en continu. La température de la pièce augmente progressivement.

Dans cette partie, on modélise la température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant t , exprimé en dizaines de minutes, par une fonction T définie sur $[0; +\infty[$.

On admet que la fonction T est :

- dérivable sur $[0; +\infty[$;
- solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y' = -0,035y + 0,91$$

où y est une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

On note T' la fonction dérivée de la fonction T .

On suppose qu'au début de l'étude, la température de la pièce est de 18 °C.

Ainsi $T(0) = 18$.

1. Donner les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0; +\infty[$.
2. En déduire que, pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$, on a :

$$T(t) = 26 - 8e^{-0,035t}.$$

3. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra la température de 20 °C.

On exprimera le résultat en heures et minutes arrondi à la minute.

4. Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20 °C, la température de la pièce pourra-t-elle dépasser 28 °C selon ce modèle?

Justifier.

Partie B : Phase de refroidissement

Lorsque la pièce atteint la température de 20 °C, le système de chauffage s'éteint et la pièce refroidit.

On modélise la température de la pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n},$$

où n est un nombre entier exprimant le temps écoulé en dizaines de minutes.

1. Montrer que $u_1 = 19,72$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a

$$u_n > 10.$$

On admet que la suite (u_n) est décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .
 - a. Justifier que cette limite est solution de l'équation

$$x = 0,965x + 0,35.$$

- b.** Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- 5.** On rappelle que le système de chauffage se met en marche automatiquement dès que la température de la pièce, est inférieure ou égale à 18°C.
- a.** Recopier et compléter les lignes 4,5 et 6 du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

```
1. def marche() :  
2.     n = 0  
3.     u = 20  
4.     while ... :  
5.         u = ...  
6.         n = ...  
7.     return n
```

- b.** Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = a + \frac{b \ln(x+1)}{x+1}.$$

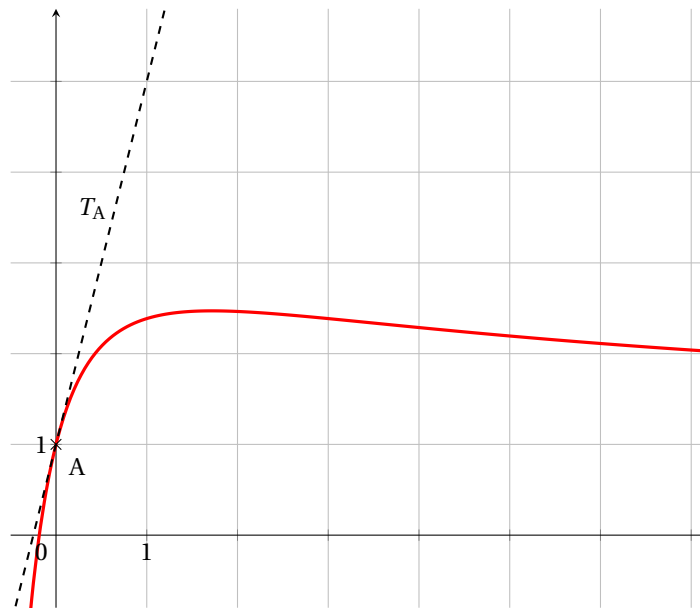
où a et b sont des réels, et \ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $] - 1 ; +\infty[$.

On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs de a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f sur $] - 1 ; +\infty[$ corresponde à celle tracée dans le repère orthonormé ci-dessous :



On précise que la droite T_A est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point $A(0; 1)$.

1. Justifier que $a = 1$.
2. En utilisant le graphique :
 - a. Donner la valeur de $f'(0)$.
Justifier.
 - b. Donner le signe de $f''(1)$.
Justifier.
3. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à $] - 1 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

- b. En déduire la valeur de b .

Partie B

On admet dans la suite de l'exercice que la fonction f est définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}$$

1. Justifier que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f .
2. Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $] - 1 ; +\infty[$.
3. On admet que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$.

Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en indiquant la valeur exacte de son extremum.

Justifier.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2; +\infty[$.
En donner une valeur arrondie à 10^{-1} .
5. a. Montrer que :

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

- b. En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.