

S 241

Durée : 1 heure 30 minutes

- Les deux problèmes sont obligatoires.
- Seules les traces écrites figurant sur la copie seront prises en compte.
- Une attention particulière sera portée à la clarté et à la précision des raisonnements.
- Seules les calculatrices non-graphiques et non-programmables sont autorisées.

SITUATION D'ÉVALUATION

Contexte : Rentabilité d'une petite entreprise

Gbèyi est une jeune bachelière issue d'une famille aux revenus modestes. Déterminée à devenir financièrement autonome, elle a travaillé à temps partiel pour réunir les fonds nécessaires à l'installation, dans sa localité, d'une cabine proposant la vente de crédit téléphonique et des services de transfert d'argent (Mobile Money).

Afin d'assurer la réussite et la pérennité de son activité, elle suit de près ses performances et cherche avant tout à optimiser son bénéfice mensuel. Pour cela, elle étudie chaque mois et sur une année :

- le bénéfice mensuel réalisé ;
- l'évolution du nombre de clients.

On note x le nombre de mois écoulés depuis le début de l'année, avec $x = 1$ pour le mois de janvier.

Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers de francs CFA, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $E = [1; 12]$ par :

$$f(x) = -\frac{150}{49}x^2 + \frac{300}{7}x.$$

Par ailleurs, grâce à une politique de fidélisation et à la publicité, l'effectif des clients augmente chaque mois de 10%.

Gbèyi souhaite alors :

- déterminer le mois où son bénéfice mensuel est maximal, et connaître ce bénéfice maximal ;
- déterminer la période au cours de laquelle son bénéfice est supérieur à 96000FCFA ;

- estimer le nombre de mois nécessaire pour que l'effectif de ses clients double par rapport à l'effectif initial.

Tâche : tu es invité(e) à trouver des réponses aux préoccupations de Gbèyi en résolvant les deux problèmes suivants.

Problème 1

1. a. Calcule $f'(x)$ pour tout x appartenant à E , f' étant la fonction dérivée de f .
b. Étudie le sens de variation de f .
c. Dresse le tableau des variations de f .
2. a. Détermine le mois au cours duquel le bénéfice réalisé est maximal et précise ce bénéfice.
3. Précise les mois au cours desquels le bénéfice mensuel est au moins égal à 96000 FCFA.

Problème 2

Gbèyi a enregistré 400 clients en janvier. On note u_n l'effectif de clients du n -ième mois ; n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1. Le nombre de clients en janvier est u_1 .

4. a. Précise u_1 puis calcule u_2 .
b. Exprime u_{n+1} en fonction de u_n .
c. Justifie que (u_n) est une suite géométrique et précise sa raison.
d. Exprime u_n en fonction de n .
5. Donne une estimation de l'effectif des clients du huitième mois d'activités.
6. Déduis-en le nombre de mois à partir duquel l'effectif des clients de Gbèyi sera au moins le double de l'effectif initial.

FIN