

RÉPUBLIQUE GABONAISE

Union – Travail – Justice

Année scolaire 2025–2026

Ministère de l'Éducation Nationale  
Direction des Examens et Concours

BAC BLANC

## BACCALAURÉAT BLANC

SESSION 2025–2026

SÉRIE : C

# ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé)

Coefficient : 7

Durée : 4 heures

### CONSEILS AUX CANDIDATS

- La clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans la notation.
- Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.
- Toute réponse non justifiée sera considérée comme nulle.

Partie	Barème
Exercice 1 – QCM	4 points
Exercice 2 – Nombres complexes et géométrie	5 points
Exercice 3 – Arithmétique et suites numériques	5 points
Problème – Analyse	6 points
<b>Total</b>	<b>20 points</b>

## Exercice 1 (4 points) – Questions à Choix Multiples

Dans cet exercice, toutes les questions sont indépendantes. Pour les quatre (4) questions, reproduis le tableau ci-dessous et complète-le par la lettre correspondant à la bonne réponse.

Numéro de la question	1	2	3	4
Lettre correspondant à la bonne réponse				

1. On considère dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  la conique  $(\mathcal{C})$  d'équation :

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1.$$

L'excentricité de  $(\mathcal{C})$  est : (1 point)

- a)  $\frac{5}{3}$                       b)  $\frac{4}{3}$                       c)  $\frac{5}{4}$                       d)  $\frac{3}{5}$

2. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la réflexion  $s$  par rapport au plan  $(\mathcal{P})$  d'équation  $z = 2$ .

L'image du point  $A(1; 3; -1)$  par  $s$  est : (1 point)

- a)  $(1; 3; 5)$                       b)  $(-1; -3; 1)$                       c)  $(1; 3; 3)$                       d)  $(2; 3; 1)$

3. Dans l'espace muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on donne les points  $A(2; 0; 1)$ ,  $B(1; 1; 0)$  et  $C(0; 2; 1)$ .

Le produit vectoriel  $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$  est égal à : (1 point)

- a)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$                       b)  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$                       c)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$                       d)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. On considère la courbe paramétrée  $(\mathcal{C})$  définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + 1 \\ y(t) = \sin t - 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des points de  $(\mathcal{C})$  est : (1 point)

- a) Le cercle de centre  $(0; 0)$  et de rayon 1      b) L'ellipse d'équation  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$   
 c) Le cercle de centre  $(1; -1)$  et de rayon 1      d) La droite  $y = x - 2$

## Exercice 2 (5 points) – Nombres complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On pose  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  et on considère les points  $A, B, C$  d'affixes respectives  $z_A = 2$ ,  $z_B = 2j$  et  $z_C = 2j^2$ .

### Partie A – Propriétés du triangle $ABC$

- (0,75 pt)** Écrire  $j$  et  $j^2$  sous forme algébrique. En déduire les coordonnées de  $A, B$  et  $C$ .
- (0,75 pt)** Calculer  $|z_B - z_A|$ ,  $|z_C - z_B|$  et  $|z_A - z_C|$ . Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?
- (0,5 pt)** Montrer que  $1 + j + j^2 = 0$ . En déduire l'affixe du centre de gravité  $G$  du triangle  $ABC$ .

### Partie B – Transformation du plan

On considère la rotation  $r$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ , et on note  $f$  la transformation du plan complexe définie par :

$$f(M) = M' \quad \text{d'affixe} \quad z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2,$$

où  $z$  est l'affixe de  $M$ .

- (1 pt)** Déterminer le module et l'argument du coefficient complexe  $(1 + i\sqrt{3})$ . Identifier la nature de  $f$  et déterminer son centre  $\Omega$  et son rapport  $k$ .
- (0,75 pt)** Déterminer l'image du point  $A$  par  $f$ .  
Montrer que  $f(B)$  a pour affixe  $-1 + i(2\sqrt{3} - 1) \dots$   
*On calculera explicitement  $f(B)$  et  $f(C)$ .*
- (0,75 pt)** Montrer que les points  $A, B, \Omega$  sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- (0,5 pt)** On note  $A' = f(A)$ . Calculer  $|z_{A'} - z_A|$  et interpréter géométriquement ce résultat.

## Exercice 3 (5 points) – Arithmétique et suites numériques

Les deux parties sont liées.

### Partie A – Arithmétique (2,5 points)

On considère les entiers  $a$  et  $b$  définis par :

$$a = 2^{10} \times 3^4 \times 5^2 \times 7 \quad \text{et} \quad b = 2^6 \times 3^5 \times 5 \times 11.$$

- (0,5 pt) Déterminer  $\text{PGCD}(a, b)$  et  $\text{PPCM}(a, b)$ .
- (0,75 pt) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation diophantienne :

$$\text{PGCD}(a, b) \cdot x - \frac{b}{\text{PGCD}(a, b)} \cdot y = \text{PGCD}(a, b).$$

On posera  $d = \text{PGCD}(a, b)$  et on cherchera une solution particulière évidente.

- (0,75 pt) Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit :

$$d_n = \text{PGCD}(3n + 4, 2n + 3).$$

- Montrer que  $d_n$  divise 1. En déduire que  $\text{PGCD}(3n + 4, 2n + 3) = 1$ .
  - Montrer que  $\text{PGCD}(n^2 + 1, n + 1)$  divise 2.
- (0,5 pt) Trouver tous les entiers  $n \geq 1$  tels que  $n^2 + 4$  soit divisible par  $n + 1$ .

### Partie B – Suites numériques (2,5 points)

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

- (0,5 pt) Décomposer  $\frac{1}{k(k+1)}$  en éléments simples.
- (0,75 pt) En déduire une expression simplifiée de  $S_n$  en fonction de  $n$ .  
Calculer  $S_{10}$  et  $S_{100}$ .
- (0,5 pt) Montrer que la suite  $(S_n)$  est croissante et bornée. En déduire sa limite.
- (0,75 pt) On pose  $u_n = 1 - S_n$  pour tout  $n \geq 1$ .
  - Montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{n}{n+1}$  au sens suivant :  
exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$  et vérifier que  $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot u_n \cdot \frac{n+1}{n} \dots$   
Plus simplement : exprimer  $u_n$  explicitement, puis montrer que  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  tend vers 1 et étudier la monotonie de  $(u_n)$ .
  - Montrer que pour tout  $n \geq 1$  :  $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$ .
  - En déduire la limite de  $u_n$  et vérifier la cohérence avec la question 3.

## Problème (6 points) – Étude d'une fonction et intégration

Les parties A et B sont liées.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}.$$

On note  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

### Partie A (4 points) – Étude analytique de $f$

1. (0,5 pt) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

La courbe  $(C)$  admet-elle une asymptote ? Justifier.

2. (1 pt) Calculer  $f'(x)$  et montrer que :

$$f'(x) = -(x^2 - 3x + 2)e^{-x} = -(x - 1)(x - 2)e^{-x}.$$

3. (1,25 pt) Étudier le signe de  $f'(x)$  et dresser le tableau de variations complet de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Préciser les valeurs exactes des extrema locaux.

4. (0,5 pt) Étudier la convexité de  $f$  : calculer  $f''(x)$ , étudier son signe et déterminer les points d'inflexion de  $(C)$ .

5. (0,75 pt) Tracer  $(C)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Données :  $e \approx 2,72$  ;  $e^{-1} \approx 0,37$  ;  $e^{-2} \approx 0,14$  ;  $e^{-3} \approx 0,05$ .

### Partie B (2 points) – Intégration

1. (1 pt) On pose  $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - x + 1)e^{-x} dx$ .

En effectuant deux intégrations par parties successives, montrer que :

$$I = 1 - 3e^{-1}.$$

On pourra utiliser le fait que  $\int xe^{-x} dx = -(x + 1)e^{-x} + K$ .

2. (0,5 pt) Calculer l'aire  $\mathcal{A}$  du domaine délimité par  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ . Donner la valeur exacte puis une valeur approchée en  $cm^2$ .

3. (0,5 pt) On note  $J = \int_0^1 x f(x) dx$ .

En développant et en utilisant les résultats précédents (ou une intégration par parties), exprimer  $J$  en fonction de  $e^{-1}$ .

---

*Sujet élaboré par **Gildas Mba Obiang**, Agrégé de Mathématiques*

BAC Blanc – Série C – Gabon – Session 2025–2026

---