

BACCALAURÉAT BLANC N°3

MATHÉMATIQUES – SÉRIE C

Auteur : M. Gildas Mba Obiang
Agrégé de mathématiques

Durée : 4 heures
Coefficient : 5

L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.

Exercice 1 : Arithmétique et Probabilités

4 points

Partie A : Arithmétique

Les parties A et B sont indépendantes.

- (a) Montrer que pour tout entier naturel x et y , les entiers $x + y$ et $x - y$ ont la même parité.
(b) En déduire la résolution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'équation :

$$x^2 = y^2 + 8$$

- (a) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $5x \equiv 1 \pmod{3}$.
(b) En déduire une solution particulière de l'équation : $5x - 3y = 1$.
(c) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation : $5x - 3y = 1$.

Partie B : Probabilités

Une urne contient 3 boules blanches et n boules noires ($n \geq 3$). Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

- Un enfant tire simultanément 3 boules de l'urne. On note A_n l'événement : « obtenir au moins une boule noire ».
(a) Calculer $p(A_n)$, la probabilité de l'événement A_n .
(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n)$.
(c) Pour quelle valeur de n a-t-on $p(A_n) \leq 0,99$?
- On remet l'urne dans sa condition initiale. L'enfant tire à nouveau au hasard, une à une, 3 boules de l'urne en remettant dans l'urne chaque boule qui a été tirée. Soit B_n l'événement : « tirer 3 boules blanches ».
(a) Calculer $p(B_n)$, la probabilité de l'événement B_n .
(b) Déterminer la valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour que $p(B_n) = \frac{27}{1000}$.

Exercice 2 : Transformations du plan

7 points

Dans le plan orienté $(\mathcal{P})$, on considère le triangle équilatéral ABC tel que $(\vec{BC}; \vec{BA}) = \frac{\pi}{3}$ et $AB = 4$ cm. Soit I le projeté orthogonal de A sur le segment $[BC]$. La droite parallèle à (AI) et passant par C coupe la droite (AB) au point Ω .

On note D le symétrique de B par rapport au point C .

Soit t la translation de vecteur $\vec{BC}$, r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, r_1 la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

On pose $f = t \circ r$ et $g = f \circ r_1$.

Partie A : Étude géométrique

- Faire la figure et placer les points A, B, C, D, I et Ω .
- Décomposer t en deux symétries orthogonales dont l'un des axes est la droite (AI) .
 - Décomposer r en deux symétries orthogonales dont l'un des axes est la droite (AB) .
 - Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
- Déterminer $g(B)$.
 - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g .
- On note $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$.
 - Placer les points A', B' et C' sur la même figure.
 - Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$? Justifier la réponse.
 - Montrer que A', B' et Ω sont alignés.

Partie B : Approche analytique

Le plan $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(B; \vec{u}; \vec{v})$ sachant que $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{BI}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\vec{IA}$.

- Exprimer le vecteur $\vec{BA}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
 - Déterminer les affixes des points A, B et C .
- Écrire les expressions complexes des transformations r, t et r_1 .
 - En déduire les expressions complexes de f et g .
 - Déterminer leur nature et leurs éléments caractéristiques.

Problème : Équation différentielle & Fonction définie par une intégrale

9

points

La partie A est indépendante des parties B et C.

Partie A : Équation différentielle (3 points)

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' - 3y = P(x)$ où P est un polynôme.

- Trouver le polynôme P pour que la fonction g définie par $g(x) = e^x + x + 1$ soit une solution de (E) .
- Résoudre l'équation différentielle $(E') : y'' + 2y' - 3y = 0$.
- Donner l'ensemble des solutions de (E) , que l'on notera h . En déduire la solution de (E) qui satisfait aux conditions $h(0) = 1$ et $h'(0) = 5$.

Partie B : Étude d'une fonction intégrale (2 points)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_{-x}^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

1. (a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{1+x^2}$$

- (b) Calculer $F(0)$. En déduire que si f est impaire, alors F est nulle.
 (c) Montrer que si f est paire, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = 2 \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{3x^2+2x+3}{x^2+1}$.

- (a) Étudier les variations de la fonction g puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (b) En utilisant la question 1, montrer que $\int_{-x}^x g(t) dt = 6x$.
 (c) Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

Partie C : Étude d'une suite (4 points)

Soit G la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ par : $G(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

1. (a) Montrer que G est dérivable sur $] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[$ et calculer $G'(x)$.
 (b) Calculer $G(0)$ et en déduire $G\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.
- (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n-1} + u_{n+1} = \frac{1}{n}$ (ou formule de récurrence selon l'énoncé corrigé).
 (c) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
3. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$.
 (b) En déduire que $v_n = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$.
 (c) Exprimer alors v_n en fonction de u_{2n+2} et u_0 , puis en déduire que (v_n) est convergente et calculer sa limite.

FIN

« Seul le travail paie ! »