

ÉPREUVE DE PRÉPARATION AU BAC C

SÉSSION 2025 – 2026 (GABON)

Concepteur : Gildas Mba Obiang, Agrégé de Mathématiques

Exercice 1 (4 points) – Questionnaire à Choix Multiples

Pour chaque ligne du tableau, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

N°	Questions et Propositions de réponses (tenues sur une seule ligne)
1.	Suites numériques & Calcul intégral : Soit la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$. En étudiant le comportement de cette suite, on peut affirmer que : Réponse A : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ Réponse B : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ Réponse C : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = e^{-1}$ Réponse D : La suite (I_n) diverge.
2.	Produit vectoriel & Alignement : Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points $A(1; 2; 3)$, $B(2; 4; 5)$ et $C(0; 0; 1)$. Le vecteur $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ vaut : Réponse A : $\vec{n}(0; 0; 0)$ Réponse B : $\vec{n}(2; -2; 0)$ Réponse C : $\vec{n}(-2; 2; 0)$ Réponse D : $\vec{n}(2; 2; 0)$
3.	Calcul barycentrique : Soit ABC un triangle non aplati du plan. On considère le système de points pondérés $\{(A, 1), (B, -2), (C, m^2 - 2)\}$. Le barycentre G_m de ce système existe si et seulement si : Réponse A : $m \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$ Réponse B : $m \in \mathbb{R}^*$ Réponse C : $m \in]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[$ Réponse D : $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$
4.	Rotations de l'espace : Soit r la rotation de l'espace d'axe la droite (D) de vecteur directeur $\vec{k}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Si $M(x; y; z)$ est un point de l'espace et $M'(x'; y'; z')$ son image par r, alors : Réponse A : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ z' = z \end{cases}$ Réponse B : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ z' = z \end{cases}$ Réponse C : $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \\ z' = 0 \end{cases}$ Réponse D : $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$

Exercice 2 (5 points) – Arithmétique

L'objectif de cet exercice est d'étudier une propriété remarquable du nombre $N = 561$, connu sous le nom de **nombre de Carmichael**.

1. Préliminaires : Le Petit Théorème de Fermat

- Énoncer le Petit Théorème de Fermat sous ses deux formes classiques.
- Soit p un nombre premier. Démontrer que pour tout entier a , et pour tout entier naturel k , on a : $a^{1+k(p-1)} \equiv a \pmod{p}$.

2. Étude de la décomposition de N

- Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $N = 561$.
- Vérifier que $N - 1$ est un multiple de 2, de 10 et de 16.

3. Propriété de Carmichael

Soit a un entier naturel quelconque.

- En utilisant la question 1.b), montrer successivement que :

$$a^N \equiv a \pmod{3} \quad ; \quad a^N \equiv a \pmod{11} \quad ; \quad a^N \equiv a \pmod{17}$$

- En déduire que pour tout entier a , $a^N \equiv a \pmod{N}$.

4. Conséquence et conclusion

- Montrer que 561 n'est pas un nombre premier.
- Un nombre composé N qui vérifie la relation $a^N \equiv a \pmod{N}$ pour tout entier a est appelé un **nombre pseudo-premier absolu**. Pourquoi cette propriété pose-t-elle un problème pour les tests de primalité basés sur le théorème de Fermat ?

Exercice 3 (11 points) – Similitudes, Nombre d'Or et Applications

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note Φ le nombre réel positif défini par $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, appelé **Nombre d'or**.

Partie A : Étude géométrique et similitudes

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z - 1 = 0$. En déduire que Φ est l'unique solution positive de cette équation et vérifier les relations : $\Phi^2 = \Phi + 1$ et $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.
- Soit s la similitude directe du plan qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) z + \Phi - 1$$

- Déterminer les éléments caractéristiques de s (centre Ω , rapport k et angle θ).
 - Exprimer l'affixe ω du centre Ω en fonction de Φ .
- On pose $A_0 = O$ (l'origine du repère) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = s(A_n)$. On note z_n l'affixe du point A_n .
 - Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \omega(1 - e^{i\frac{n\pi}{3}})$.
 - Déterminer la nature géométrique du triangle $\Omega A_0 A_1$.
 - Démontrer que la suite de points (A_n) est périodique. Préciser sa période.

Partie B : Propriétés algébriques du Nombre d'Or

1. En utilisant la relation $\Phi^2 = \Phi + 1$, montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, il existe deux nombres entiers naturels F_n et F_{n-1} tels que :

$$\Phi^n = F_n \Phi + F_{n-1}$$

Où la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

2. *Formule de Binet* : Soit $\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
 - a) Vérifier que Φ' est la seconde solution de l'équation $z^2 - z - 1 = 0$.
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_n = \frac{\Phi^n - (\Phi')^n}{\sqrt{5}}$.

Partie C : Application – Perspective de croissance

1. Calculer la limite du rapport $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Soit σ la similitude directe de centre Ω , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{\Phi}$. Justifier brièvement comment cette transformation engendre de manière géométrique une suite de carrés appelée « Spirale d'Or ».

Fin de l'épreuve. Bonne chance !