



EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé)

Coefficient : 5

Durée : 4 heures

EXERCICE (4 points)

Dans cet exercice, toutes les questions sont indépendantes. Pour les quatre (4) questions, reproduis le tableau ci-dessous et complète le par la lettre correspondant à la bonne réponse.

Numéro de la question	1	2	3	4
Lettre correspondant à la bonne réponse				

- Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On donne les points $A(-1; 2; 3)$; $B(0; 1; 0)$ et $C(1; 0; -1)$. L'aire du triangle ABC en unité d'aire est : (1pt)
 a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{2}$
- Une boîte contient 3 boules blanches, 2 boules vertes et 5 boules rouges indiscernables au toucher. On tire simultanément 3 boules de la boîte. La probabilité de tirer 3 boules de couleurs différentes est : (1pt)
 a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{120}$ d) $\frac{1}{4}$
- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $1 - 3i$ et $-2 + i$. Le triangle OAB est : (1pt)
 a) isocèle en O b) quelconque
 c) rectangle et isocèle en B d) équilatéral
- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique de raison $-0,5$. Si $u_2 = 7$, alors u_n est égal à : (1pt)
 a) $8 - 0,5n$ b) $7 - 0,2n$ c) $7 - 0,5n$ d) $-0,5 + 7n$

Problème 2 (11 points)

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x(-1 + \ln x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A (7,75 points)

- Montre que l'ensemble de définition D_f de f est $\mathbb{R}$. (0,25pt)
- Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,5pt)

- 3) Étudie la continuité de f en 0. (0, 75pt)
- 4) Étudie la dérivabilité de f en 0 et interprète graphiquement les résultats. (1, 25pt)
- 5) a. Étudie les variations de f . (1, 5pt)
b. Dresse le tableau de variation de f . (0, 5 pt)
- 6) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète le résultat obtenu. (0, 75pt)
- 7) a. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[1; +\infty[$. Montre que h réalise une bijection de $[1; +\infty[$ vers un intervalle J que l'on précisera. (0, 75pt)
b. Construis (C) et la courbe (Γ) de h^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (1, 5pt)

Partie B (2, 25 points)

Soit α un réel tel que $0 \leq \alpha \leq e$. On pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^e f(x) dx$.

- 1) a. Calcule en utilisant une intégration par partie $\int_{\alpha}^e x \ln x dx$. (0, 5pt)
b. En déduis $I(\alpha)$ (0, 5pt)
c. Donne une interprétation graphique de $I(\alpha)$. (0, 25pt)
d. Calcule $\lim_{\alpha \rightarrow 0} I(\alpha)$. (0, 25pt)
- 2) En déduis en cm^2 , l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) ; les axes du repère et la droite d'équation $x = e$. (0, 25pt)
- 3) Soit (E) le domaine du plan tel que $-1 \leq x \leq 0$ et $f(x) \leq y \leq 0$.
Calcule, en cm^3 , le volume du solide engendré par la rotation complète de (E) autour de l'axe des abscisses. (0, 5pt)

Partie C (1 point)

On considère dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (Γ_1) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \ln(\cos t) \\ y(t) = \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t} \end{cases} \text{ avec } t \in]0; \frac{\pi}{2}[$$

- 1) Montre que (Γ_1) est une partie de (C) . (0, 5pt)
- 2) Détermine les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ pour $t = \frac{\pi}{4}$. (0, 5pt)

Situation d'intégration (5 points)

Un laboratoire de recherche en sciences environnementales surveille une vaste zone forestière exposée à un gaz polluant d'origine industrielle. La détection précoce de ce gaz est essentielle pour protéger l'écosystème et prévenir tout risque pour les populations riveraines.

Pour assurer cette surveillance, un drone équipé d'un capteur spécialisé effectue des passages successifs au-dessus d'un point stratégique. À chaque passage, la probabilité de détecter le gaz est constante et égale à $p = 0,3$.

La position du drone à l'instant t est définie par : $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}$ avec $t \in [0, 2\pi]$ (L'unité de longueur est le kilomètre.)

Le chef d'équipe souhaite prendre des décisions rationnelles pour améliorer la stratégie de surveillance. Pour cela :

- Il est important de déterminer précisément la nature géométrique de la trajectoire du drone afin d'optimiser la couverture de la zone, d'éviter des zones non surveillées et de mieux planifier les vols tout en réduisant les coûts énergétiques.
- Il est nécessaire de calculer la probabilité de détecter le gaz lors de plusieurs passages afin d'évaluer l'efficacité réelle du dispositif de surveillance et de mesurer le niveau de fiabilité des données recueillies.
- Il est enfin essentiel d'analyser mathématiquement l'évolution de cette probabilité lorsque le nombre de passages augmente, car toute augmentation du nombre de vols entraîne des coûts supplémentaires. Il faut donc déterminer si multiplier les passages garantit réellement la détection du gaz.

N'étant pas spécialiste en mathématiques, le chef d'équipe sollicite ton expertise d'élève en Terminale Scientifique afin d'apporter une analyse rigoureuse permettant d'éclairer sa décision.

Aide le chef d'équipe en :

1. Déterminant la nature de la trajectoire du drone.
2. Calculant la probabilité de détecter le gaz au moins une fois lors de deux passages successifs.
3. Étudiant l'évolution de cette probabilité lorsque le nombre de passages augmente et conclure sur la validité de l'affirmation suivante :

« Plus le nombre de passages augmente, plus la détection devient certaine. »