

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

à l'attention de l'élève motivé de terminale C-E

Proposé par Gildas Mba Obiang professeur agrégé en mathématiques

Cette épreuve de mathématiques a été spécifiquement conçue pour couvrir trois piliers fondamentaux des programmes de Terminale C et E : **l'analyse, l'arithmétique, les nombres complexes et la géométrie**. Elle s'adresse prioritairement à l'élève motivé, désireux non seulement de tester ses connaissances, mais aussi d'approfondir sa compréhension des concepts mathématiques de ce niveau exigeant. En proposant des situations stimulantes et progressives, ce sujet constitue un excellent tremplin pour tous ceux qui ambitionnent d'intégrer une classe préparatoire **MPSI-MP** et qui souhaitent, dès à présent, acquérir la rigueur et les réflexes nécessaires pour y réussir. Bon travail et bonne réflexion !

Nombres complexes et géométrie

Exercice 1. Compréhension du module et argument d'un nombre complexe../ 4 points

Déterminer l'ensemble des nombres points M d'affixe z différent de 1 tels que $\left(\frac{z}{z-1}\right)^6$ soit réel.

Exercice 2. Théorème de Joachimstal../ 7 points

On se place dans le plan affine euclidien de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère $\mathcal{E}$ une ellipse de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases}$$

avec $t \in]-\pi, \pi[$ et a, b deux réels distincts.

Soient quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 distincts de l'ellipse $\mathcal{E}$ de paramètres t_1, t_2, t_3 et t_4

1. La condition nécessaire..

Soit (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$ avec α, β et γ des nombres réels.

On suppose que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 appartiennent à (C) .

a) Montrer que les réels t_1, t_2, t_3 et t_4 sont les racines du polynôme

$$P(X) = \left(\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}\right)X^4 + (a\alpha - ib\beta)X^3 + \left(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \gamma\right)X^2 + (a\alpha + ib\beta)X + \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}$$

b) En utilisant les relations coefficients racines du polynome P montrer que $\frac{\sum_{i=1}^4 t_i}{2\pi}$ est un entier.

c) En déduire que quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 distincts de l'ellipse $\mathcal{E}$ de paramètre t_1, t_2, t_3 et t_4 sont cocycliques si $\sum_{i=1}^4 t_i \equiv 0[2\pi]$.

2. La condition suffisante..

a) Montrer qu'il existe (C') le cercle circonscrit circonscrit trois points des points M_1, M_2, M_3 et M_4 de l'ellipse $\mathcal{E}$.

b) En déduire que (C') coupe l'ellipse $\mathcal{E}$ en un quatrième point M de paramètre t .

c) On suppose que M_1, M_2 et M_3 appartiennent à (C') . Démontrer qu'alors $t \equiv t_4[2\pi]$ puis conclure.

Arithmétique

Exercice 3. Congruence et divisibilité../ 3 points

1. Rappeler le petit théorème de Fermat.

2. Justifier que 561 n'est pas un nombre premier. En déduire ses diviseurs positifs.

3. Soit a un entier premier avec 561.

a) Montrer que $a^{560} \equiv 1[561]$

- b) En déduire que le réciproque du petit Fermat théorème est fausse.

Dérivation et sens de variation
--

Exercice 4. Dérivée d'une réciproque et étude de la fonction W de Lambert../ 6 points

1. ROC : restitution organisée des connaissances../ 3 points

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I et bijective de I dans $J = f(I)$. Montrer que si f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

2. Application : étude de la Lambert W_0

a) Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Montrer que f réalise une bijection $I = [-1, +\infty[$ dans J à préciser. On note W_0 la bijection réciproque.

b) Montrer que pour tout $x \in J$, $W_0'(x) = \frac{W_0(x)}{x(1 + W_0(x))}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x - x = 2$.