

Travaux dirigés de Mathématiques



Niveau : TERMINALE C –☆– Durée : 03 heures –☆– Date : 31 Mai 2026



Exercice n° 1.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation définie par :

$$(E_\theta) : z^2 - 2(i + \cos(\theta + \frac{\pi}{4}))z + 2i\cos(\theta + \frac{\pi}{4}) = 0 \text{ où } \theta \in] - \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} [.$$

- ❶ Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .
- ❷ Écrire les solutions de (E_θ) sous forme exponentielle.
Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère : A, B, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 2i$, $z_1 = i + e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$ et $z_2 = i + e^{-i(\theta + \frac{\pi}{4})}$, où $\theta \in] - \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} [$.
- ❸ Montrer que M_2 est l'image de M_1 par la translation de vecteur : $\vec{w}(-2i\sin(\theta + \frac{\pi}{4}))$.
- ❹ (a) Déterminer et construire l'ensemble : $\Gamma = \{M(z) \in (P); \arg(\frac{z-2i}{z}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]\}$.
(b) Montrer que lorsque θ varie sur l'intervalle $] - \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} [$, chacun des points M_1 et M_2 varient sur l'ensemble Γ .
(c) On suppose que : $\theta \in I =] - \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} [\cup] - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} [$ et soit G le centre de gravité du triangle AM_1M_2 .
Déterminer l'ensemble des points G lorsque θ varie dans I .
- ❺ Soit M le point d'affixe m , tels que $m \in \mathbb{C} - \{0, 2i\}$ et $\theta \in I$.
Déterminer l'ensemble des points M pour qu'ils appartiennent au cercle circonscrit au triangle OBM_1 .

Exercice n° 2.

Le plan (P) est orienté dans le sens direct. Soit $ABKI$ un losange tel que : $(\widehat{AB; AI}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par J et O les milieux respectifs des segments $[AI]$ et $[IK]$; C et D les symétriques de A et K respectivement par rapport à I . La droite (BI) coupe la droite (DC) en P .

- ❶ (a) Faire une figure. On prendra $[AB]$ horizontalement et $AB = 6\text{cm}$.
(b) Montrer que P est le milieu du segment $[DC]$.
- ❷ On se propose de caractériser l'isométrie f qui transforme A en I et I en K . On pose : $g = f \circ t_{\vec{BA}}$.
(a) Déterminer $g(B)$ et $g(K)$, puis caractériser alors l'isométrie g .
(b) En déduire que : $f = S_{(AK)} \circ t_{\vec{AB}}$ où $f = R_{(K; -\frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{AB}}$.
- ❸ On pose : $f_1 = R_{(K; -\frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{AB}}$. On désigne par H le projeté orthogonal de K sur la droite (AB) .
(a) Déterminer deux axes (D_1) et (D_2) telle que : $R_{(K; \frac{\pi}{3})} = S_{(D_1)} \circ S_{(BK)}$ et $R_{(B; -\frac{\pi}{3})} = S_{(BK)} \circ S_{(D_2)}$.
(b) En déduire que : $R_{(K; \frac{\pi}{3})} \circ R_{(B; -\frac{\pi}{3})} = t_{\vec{AB}}$. Puis identifier alors l'isométrie f_1 .
- ❹ On pose $f_2 = S_{(AK)} \circ t_{\vec{AB}}$ et $E = S_B(A)$.
(a) Montrer que $f_2(D) = B$ et $f_2(B) = C$.
(b) Montrer que f_2 est une symétrie glissée et préciser sa forme réduite.
- ❺ Soit φ une application définie par : $\varphi = f_2^{-1} \circ f_1$.
(a) Déterminer $\varphi(A)$; $\varphi(I)$ et $\varphi(B)$, puis caractériser l'application φ .

(b) Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifie : $f_1(M) = f_2(M)$.

- ⑥ Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre Q milieu du segment $[BK]$ qui passe par K et qui coupe la perpendiculaire à (HK) passant par Q en F tel que KBF soit un triangle direct. On désigne par $(\mathcal{H})$ une hyperbole dont les asymptotes sont les droites (BK) et (OH) et d'axe focal la droite (QF) .

(a) Que représente le quadrilatère $BHKO$ et le cercle $(\mathcal{C})$ pour l'hyperbole $(\mathcal{H})$?

(b) Quel est le centre de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.

(c) Préciser le foyer de l'hyperbole $(\mathcal{H})$.

(d) Tracer les directrices $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ de $(\mathcal{H})$.

(e) Tracer la branche $(\mathcal{H}_0)$ de $(\mathcal{H})$ relativement au foyer F .

Exercice n°3.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = -1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)e^x$.

- ① Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

- ② Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$; $f'(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2} e^x$.

- ③ Dresser le tableau de variation de f .

- ④ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $] -1; +\infty[$ unique solution α et que $1.5 < \alpha < 1.6$.

- ⑤ Vérifier que $e^\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ et que $f(-\alpha) = 0$.

- ⑥ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

- ⑦ Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice n°4.

Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate.

On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

- ① Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate ?
- ② Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate ?
- ③ Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate ?
- ④ Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

 *Plein Succès au Bac 2026* 



☆☆☆