

# Suites définies par une intégrale

Niveau : Terminale C

Gildas Mba Obiang

Agrégé de mathématiques

**Exercice 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$$

1. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a :  $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ .
2. Préciser alors la limite de la suite  $(I_n)$ .
3. (a) Trouver une relation entre  $I_{n+2}$  et  $I_n$ .  
(b) Calculer  $I_1$  puis  $I_5$ .

## Résolution

1. La fonction  $f : x \mapsto e^{x^2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et en particulier sur  $[0; 1]$ . Pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f'(x) = 2xe^{x^2} \geq 0$ . Par suite,  $f$  est croissante sur  $[0; 1]$ . On en déduit l'inégalité suivante :

$$\forall x \in [0; 1], \quad f(0) \leq f(x) \leq f(1) \implies 1 \leq e^{x^2} \leq e$$

Comme  $\forall x \in [0; 1], x^n \geq 0$ , on obtient :

$$x^n \leq x^n e^{x^2} \leq ex^n$$

En vertu de la positivité et de la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 ex^n dx \implies \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq e \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

D'où :

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

2. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ . Par suite, en vertu du théorème de comparaison (ou théorème des gendarmes), on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

3. (a) Soit  $n$  un entier naturel. On a  $I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{x^2} dx = \int_0^1 x^{n+1} \cdot (xe^{x^2}) dx$ .

Posons une intégration par parties en écrivant :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{n+1} & \implies & u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) &= xe^{x^2} & \implies & v(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$I_{n+2} = \left[ \frac{1}{2} x^{n+1} e^{x^2} \right]_0^1 - \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{x^2} dx = \frac{e}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$

(b) On calcule directement  $I_1$  :

$$I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[ \frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

En utilisant la relation de récurrence obtenue pour  $n = 1$  puis  $n = 3$  :

$$I_3 = \frac{e}{2} - \frac{1+1}{2} I_1 = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$I_5 = \frac{e}{2} - \frac{3+1}{2} I_3 = \frac{e}{2} - 2 \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{e-2}{2}$$

**Exercice 2.** Soit  $n$  un entier naturel, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \left( \sqrt{1-t^2} \right)^n dt$$

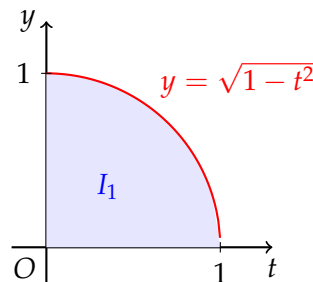
1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Montrer que la suite  $(I_n)$  est décroissante et minorée. Conclure.
3. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ .  
 (b) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $(n+3)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}I_n$ .  
 (c) En déduire que la suite de terme général  $U_n = (n+2)I_{n+1}I_n$  est indépendante de  $n$ , puis déterminer sa valeur.

### Résolution

1. Calcul de  $I_0$  :  $I_0 = \int_0^1 dt = [t]_0^1 = 1$ .

Calcul de  $I_1$  par deux méthodes :

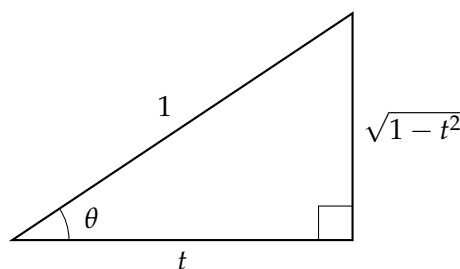
**Méthode 1 (Géométrique) :** La fonction  $f : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$  est positive sur  $[0;1]$ . L'intégrale  $I_1$  correspond géométriquement à l'aire du domaine sous la courbe délimité par le graphe de  $f$ , l'axe des abscisses et les droites  $t = 0$  et  $t = 1$ .



Par conséquent,  $I_1$  est l'aire exacte d'un quart du disque de centre  $O(0;0)$  et de rayon  $R = 1$  :

$$I_1 = \frac{\pi \times 1^2}{4} = \frac{\pi}{4}$$

**Méthode 2 (Trigonométrique) :** En posant le changement de variable  $t = \sin \theta$ , on a  $dt = \cos \theta d\theta$ . Les bornes deviennent :  $t = 0 \iff \theta = 0$  et  $t = 1 \iff \theta = \frac{\pi}{2}$ .



$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[ \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On étudie le signe de la différence :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (\sqrt{1-t^2} - 1) (\sqrt{1-t^2})^n dt$$

Or,  $\forall t \in [0;1]$ ,  $0 \leq \sqrt{1-t^2} \leq 1$ , donc  $\sqrt{1-t^2} - 1 \leq 0$  et  $(\sqrt{1-t^2})^n \geq 0$ . Par positivité de l'intégrale,  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ . La suite  $(I_n)$  est donc décroissante. Comme  $\forall t \in [0;1]$ ,  $(\sqrt{1-t^2})^n \geq 0$ , on a  $I_n \geq 0$ . La suite étant décroissante et minorée par 0, elle converge.

3. (a) En effectuant le changement de variable  $t = \cos x$ , on obtient  $dt = -\sin x dx$ . Les bornes deviennent :  $t = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$  et  $t = 1 \iff x = 0$ . Ainsi :

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sin x)^n (-\sin x dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx$$

Pour  $n \geq 2$ , on réécrit l'intégrale sous la forme (Intégrales de Wallis) :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin^{n-1} x dx = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1} x dx$$

Par intégration par parties sur la seconde intégrale en posant  $u(x) = \cos x \implies u'(x) = -\sin x$  et  $v'(x) = \cos x \sin^{n-1} x \implies v(x) = \frac{1}{n} \sin^n x$  :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-1} x dx = \left[ \frac{\cos x \sin^n x}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x) \left( \frac{1}{n} \sin^n x \right) dx = 0 + \frac{1}{n} I_n$$

On obtient alors :  $I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n} I_n \implies (1 + \frac{1}{n}) I_n = I_{n-2}$ , ce qui donne :

$$I_n = \frac{n}{n+1} I_{n-2} \quad \text{soit en décalant l'indice : } I_{n+2} = \frac{n+2}{n+3} I_n$$

(b) En utilisant la relation précédente au rang  $n+2$  :

$$(n+3)I_{n+2} = (n+2)I_n$$

En multipliant chaque membre de cette égalité par  $I_{n+1}$ , on obtient immédiatement :

$$(n+3)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}I_n$$

(c) Posons  $U_n = (n+2)I_{n+1}I_n$ . La relation précédente montre directement que  $U_{n+1} = U_n$ . La suite  $(U_n)$  est donc constante. Sa valeur est déterminée à l'aide des termes initiaux pour  $n = 0$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)I_{n+1}I_n = 2I_1I_0 = 2 \times \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

On en conclut que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2(n+2)}$$

— Fin —