+221 76 281 24 87 // +221 77 726 78 68

+221 76 281 24 87 // +221 77 726 78 68

MATIÈRE : MATHÉMATIQUES	NIVEAU :TS2	PROFESSEUR :M.S.TOUBA GUEYE

LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1:

Ecrire sous forme exponentielle :

$$u = \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 + e^{-i\frac{\pi}{3}}} \; ; v = \frac{(1 + i\sqrt{3})(\sin x + i\cos x)}{(1 - i)(\cos x - i\sin x)}$$

Exercice2:

$$\text{Soient } z_A = i \;\; ; z_B = 2; Z = \frac{2z - 4}{z - i} \qquad avec\ z \neq i$$

1) Déterminer l'ensemble des points $M\ (z)$ pour que Z soit réel

2)Déterminer l'ensemble des points $M\ (z)$ pour que Z soit imaginaire pur

3)Déterminer l'ensemble des points $M\ (z)$ pour que $|Z| = 2$

Exercice3:

On considère le polynôme $P(z)$ suivant : $P(z) = z^3 - (11 + 2i)z^2 + 2(17 + 7i)z - 42$

1)Démontrer que l'équation $P(z)$ admet une solution réelle α.

2) Déterminer un polynôme $Q(z)$tel que : $P(z) = (z - \alpha)Q(z)$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ que l'équation $P(z) = 0$.

Exercice4:

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E): P(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i) - 42 = 0$

1)Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3i$, $z_B + 1 - i$, $z_c = 1 + 2i$ et $z_D = i$.

a) Placer ces points et justifier la nature du triangle ACD ?

b)Soit G le barycentre de $\{(A; 1); (B; 2); (C; -2)\}$ Montrer que les points A, D et G sont alignés.

Exercice5:

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - \left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)z + 2^{2\theta} = 0$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$

Donner les solutions sous forme exponentielle.

Exercice6:

On considère l'équation (E) : $z^4 - (2 - i)z^3 - 3iz^2 + (4 - i)z + 1 + 3i = 0$

1) Montrer que (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2 .

2) Déterminer les autres solutions de (E).

3)A, B,C et D les images des solutions de (E). On désigne par z_1, z_2, z_3 et z_4 les solutions de (E)

a)Montrer que $\frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \div \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ est réel

b) Que peut-on dire de A, B, C et D ?

Exercice7:

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = \sqrt{3} + i$, $z_C = -2\sqrt{3} + 2i$; $z_D = 4i$

1) a) Placer ces points et justifier la nature du triangle ABC.

b) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2) Donner la forme trigonométrique de $\frac{{z_B}^5}{{z_C}^5}$

3) Soit le point E tel que $z_E = e^{-i\frac{\pi}{4}} z_B$

a) Donner l'affixe de E sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos(-\frac{\pi}{12})$ et $\sin(-\frac{\pi}{12})$

c) Calculer ${z_E}^n$ puis trouver le plus petit entier naturel non nul n tel que ${z_E}^n \in \mathbb{R}$

Exercice 8:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2cm.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $4z^2 - (8-6i)z + 1 - 5i = 0$

2) On considère A, B, C et D d'affixes respectives $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $\frac{3}{2} - i$, i et $1 + \frac{1}{2}i$

a) Placer A, B, C et D dans le repère.

b) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABD.

3) On considère les suites (z_n) et (a_n) définies par :

$$\begin{cases} z_0 = i + 2 \\ z_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z_n + 1 - i \end{cases} \quad \text{et} \quad a_n = z_n - 2$$

a) Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) En déduire que pour tout $\mathbb{N}$, $z_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} + 2$

c) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels P_n, le point image de z_n est sur l'axe réel.

Exercice9 :

Pour tout entier $n \geq 1$ on considère : $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$

1)On pose $z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$

a)Donner une expression simple de la somme.$S'_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$

b)Donner la partie imaginaire de S'_n

c)En déduire l'égalité : $S_n = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$ puis calculer la limite la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \geq 1}$

Exercice10 :

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé, $M(z)$, $z_0 = 1$et.$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$

1) Calculer $\frac{z_{n+1} - z_n}{2}$ puis en déduire la nature du triangle OM_nM_{n+1}

2)Soit $r_n = |z_{n+1} - z_n|$. Interpréter géométriquement r_n.

3) Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

4) Déterminer en fonction de n la longueur de la ligne brisée $L_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots \ldots + M_nM_{n+1}$

Exercice 11:

Soit (z_n) définie par : $\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \end{cases}$

1) Calculer z_1 et z_2.

2) On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = z_n + 2$

a) Montrer que $U_n = (2+i)(1+i)^n$

b)Exprimer z_n en fonction de n.

3) Soit M_{n+1}, M_n, A et B les points d'affixes respectives z_{n+1} , z_n, i et $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Démontrer que $\frac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ et que $\left(\overrightarrow{BM_n}; \overrightarrow{AM_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Exercice 12

Soit $w = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

1)a) Calculer w^2.

b) Determinier le module et un argument de w^2.

c)Donner une écriture exponentielle de w^2.
2) En déduire un argument de w.
Exercice 13 :
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3-(3+2i)z^2+(1+4i)z+1-2i=0$
1)a) Déterminer la solution réelle de cette équation.
b)Montrer que i est une solution de cette équation.
c) Déterminer la troisième solution de cette équation.
2) Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, i et 2 + i.
Déterminer le module et un argument de $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.
a)En déduire la nature du triangle ABC.
b)Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$
Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre I (1 + i) et de rayon r à determinier
Exercice 14 :
1) Résoudre $dans$ $\mathbb{C}$; $z^3=1$
2)a) Développer $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^3$
b) Soit l'équation $(E):=z^3=4\sqrt{2}(-1-i)$
En posant $u=\frac{z}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$.Déterminer sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique les Solutions de (E)
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$
Exercice 15
1)a) Montrer que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^3=1$.On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique .
c) Déduire des question précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :$z^3=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
2)a) Ecrire $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique
b) En déduire les arguments des solutions de (E)
3) Déduire des questions 1)c) et 2)b) les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$) .On considère la transformation F qui à pour tout point M d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z'=\sqrt{2}(-1+i)z+\left(1+\sqrt{2}\right)i+\sqrt{2}$$

a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de F
b) Construire l'image B du point A d'affixe -1
Exercice 16 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme $u_0=4$ et de raison $\frac{1}{2}$
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme $v_0=\frac{\pi}{4}$ et de raison $\frac{\pi}{2}$.Pour tout entier naturel n ; on note z_n le nombre complexe de module u_n et dont un argument est v_n
1)a) Exprimer u_n et v_n en fonction de n
b) En déduire z_n
2) Démontrer que (z_n) est une géométrique de raison $q=\frac{1}{2}i$ et de premier terme $z_0=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$
3) Soit (P) le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ et M_n le point d'affixe z_n
a) Déterminer la nature de la transformation F qui au point M_n associe le point M_{n+1}d'affixe z_{n+1}
4) Pour tout entier naturel n , on pose $z_n=z_0z_1z_2\ldots\ldots z_n$
a) Exprimer en fonction de n un argument de z_n
b) Démontrer que si n est impair alors z_n est réel
Exercice 17 :
Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes , on note

(E) :$z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i = 0$
1a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer
b) Montrer que $1+2i$ et $-2+3i$ sont des solutions de (E)
c) Donner l'ensemble des solutions de (E)
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ .Soient les points A ,B et C d'affixes respectives $1+2i$;$3i$; $-2+3i$.Soit G le barycentre de A,B et C affectés de coefficients respectifs 2 ; -2 et 1
a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$;$\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixe respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $2i$; $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et que ces affixes sont dans cet ordre en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite
b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A et B et B en C. Donner les éléments caractéristiques de cette similitude
Exercice 18
1) Déterminer la forme trigonométrique et la forme algébrique de $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$
En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$
2) Déterminer et construire $E_1 = \{M(z); (iz-2)(\overline{z}-1) \text{ soit un réel}\}$
3) Déterminer et construire $E_1 = \left\{M(z); arg(iz-2)(\overline{z}-1) = \frac{\pi}{2}\right\}$
Exercice 19 :
$\mathbb{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes
1) Montrer que dans $\mathbb{C}$; la somme des racines n^{ieme} de l'unité est nulle $(n \geq 2)$
2) En utilisant les résultats du 1) , montrer que $\cos\frac{\pi}{5}$ est solution de l'équation $4x^2 - 2x - 1 = 0$
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{10}$
Exercice 20 :
1)Factoriser $\alpha^2 - i\alpha - 1$
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - \alpha(\alpha+1)z - i\alpha^3 = 0$
2) On note r le module de α et θ un de ses arguments .Calculer le module et un des arguments de chacune des solutions de (E)
3) P désigne le plan complexe .On note S_α l'application définie par :
$$S_\alpha : P \to P$$
$$M(z) \to M'(z') \text{ tel que } z' = i\alpha z + \alpha^2$$
Déterminer α pour que S_α soit une rotation d'angle $\frac{5\pi}{6}$
Exercice 21 :
Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ .Soit f l'application de $\mathbb{C}/\{2i\}$ vers $\mathbb{C}$ définie par :
$$f(z) = \frac{2z-i}{z-2i}$$
a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $f(z) = z$
Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique
b) Calculer ${z_1}^4 + {z_2}^4$
1)Soit $M(z)$ un point de P .Soit (Γ) l'ensemble des points M(z) tel que $f(z)$ soit un imaginaire pure.
Donner une équation cartésienne de (Γ) .Tracer (Γ)
2) Montrer que $|z| = 1 \Leftrightarrow |f(z)| = 1$
Exercice 22 :
Soit le nombre complexe $Z = (1-x)$ avec $\in \mathbb{R}$.
1) Calculer le module et un argument de Z (on discutera selon les valeurs de x) . donner pour chaque cas la forme trigonométrique et la forme exponentielle de Z.
2) Montrer que Z^{2004} est un réel dont on précisera le signe.
3) a) Montrer que l'équation $|Z| = 2$ admet deux racines Z_1 et Z_2
On notera Z_1 le complexe de plus grande partie réelle et Z_2 l'autre racine
b) Ecrire Z_1 et Z_2 sous forme algébrique.

c) Placer les points A_1 et A_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$) et vérifier que A_2, O, A_1 sont alignés.

Exercice 23 :

On considère les points $A_1; A_2; A_3$ d'affixes respectives :

$$z_1 = 1; z_2 = 1 + \sqrt{2} + i\sqrt{2}\ ; z_3 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4}$$

1)a) Donner une écriture trigonométriques des nombres complexes $z_2 - z_1$et $z_3 - z_1$

b) Donner une forme algébrique et une forme trigonométrique de $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

2) Soit S la similitude plane directe transformant $A_2\ en\ A_3$ et A_1 en A_1

a) Préciser les éléments caractéristiques de S

b) On désigne par M' d'affixe z' ; l'image par S du point M d'affixe z .Exprimer z' en fonction de z .En déduire l'image par S du point B d'affixe $1 - 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 24 :

On considère le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $-z^3 + 6z - 20i = 0$ (E) sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure a .

2) Notons b et c les autres solutions de (E) , b ayant la partie réelle positive et soient A, B, C les points de P d'affixes respectives a, b, c. Déterminer le module et un argument de $\frac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC.

3) Soit r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ rad ; et f l'application qui à tout point M de P d'affixe $z \neq i - \sqrt{3}$ associe le point M ' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z - 2i}{z + \sqrt{3} - i}$$

a) Donner l'écriture complexe de r puis l'affixe du point $A' = r(A)$.

b) Déterminer l'ensemble des points M de P dont les images par f ont pour affixe un réel négatif. On notera E cet ensemble.

c) Déterminer l'ensemble F des points M de P dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 25 :

Soit a $\in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$et f_a l'application du plan complexe dans lui-même qui, au point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z' définie par :

$$z' = (-1 + i\tan a)z - i\tan a + 2$$

1) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $-1 + i\tan a$.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f_a .

3) Soit h_a l' homothétie de centre le point Ω d'affixe 1 et de rapport $\frac{1}{\cos a}$.

Donner une écriture complexe de la rotation r_a telle que : $f_a = r_a \circ h_a$.

Exercice 26 :

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation

$(E): z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0$

1)a) Vérifier que (E) admet une solution réelle

b) Achever la résolution de l'équation (E)

2) Dans le plan complexe , on désigne par A,B ;C les points d'affixes respectives $z_A = -1$; $z_B = -2 + i; z_C = 1$

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

b) En déduire la nature du triangle ABC

c) Donner le centre ; le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C.

Exercice 27 :

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation (E) d'inconnue z telle que : (E) $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$.

a) Montrer que cette équation possède une solution réelle notée z_1. Déterminer l'autre solution z_2 de (E).

b) Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on note M_1 le point d'affixe z_1 et M_2 le point d'affixe $z_{2.}$.

Déterminer l'affixe du point C de l'axe $(O, \overrightarrow{e_1},)$ (équidistant deM_1 etM_2 .

c) Soit la rotation R_1 de centre C telle que $R_1(M_1) = M_2$.

d) Déterminer une mesure de l'angle de la rotation R_1.

β) Déterminer l'affixe du point O ' image de O par R_1 .

d) Soit la rotation R_2 de centre O et d'angle orienté θ tel que Mes $\theta = \frac{\pi}{2}\ rad$.

α) Quelle est la nature de la composée $R_2 o R_1$? Justifier votre réponse.

β) Soit B d'affixe $3i$. Déterminer l'image du cercle circonscrit au triangle BOC par$R_2 o R_1$. Justifier votre réponse.

Exercice 28 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a)$z^2 - 2z + 5 = 0$

b) $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

2) On considère dans le plan (P) de repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points A , B ;C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$; $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$; $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$; $z_D = 1 - 2i$

a) Placer les points A, B, C et D dans le plan (P)

b) Vérifier que $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$;en déduire la nature triangle ABD

c) Montrer que les points A , B ;C et D appartiennent à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon .

3) On considère l'équation (E): $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$

a) Résoudre (E) $dans$ $\mathbb{C}$

b) Montrer que les images des solutions des (E) appartiennent à (C)