Gpm Cluster Tle C

FICHE DE TRAVAUX DIRIGÉS
CLASSE : TERMINALE C

- ► Espace vectoriel.
- ► Applications linéaires et matrices.
- ► Applications de l'espace.
- ► Equations différentielles.
- ► Calculs des probabilités.
- ► Suites numériques.
- ► Coniques.

Édition : Mai 2020

TRAVAUX DIRIGÉS ESPACE VECTORIEL

Exercice 1 : contrôle de connaissance

1. Soit E un ensemble non vide ; on munit E d'une loi de composition interne notée "+" et d'une loi de composition externe notée " . " .
   Définir (E , + , .) est uu espace vectoriel réel . Dans la suite on notera tout simplement **E** pour signifier que $(E, +, .)$ est un espace vectoriel réel .
2. Soit E un espace vectoriel et F une partie de E . **Définir F est un sous espace vectoriel de E** .
3. Soit E un espace vectoriel Réel et $\mathcal{F}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, ..., \vec{u_n})$ une famille de n vecteurs de E . **Définir :**
   (a) La famille $\mathcal{F}$ est liée ;
   (b) La famille $\mathcal{F}$ est libre
   (c) La famille $\mathcal{F}$ est génératrice
   (d) La famille $\mathcal{F}$ est une base de E .
   (e) Dimension de l' espace vectoriel E .
   (f) Supposons que La famille $\mathcal{F}$ est une base de E . **Déterminer dim E**
4. Soit E un espace vectoriel Réel et F , G deux sous espaces vectoriels de E . **Définir :**
   (a) Définir de façon explicite le sous espace vectoriel $F + G$ et montrer en utilisant la définition qu'il est effectivement un sous espace vectoriel de E .
   (b) Compléter :$dim(F + G) = ... + ... - ...$
   (c) Définir : le sous espace vectoriel $(F + G)$ de E est une somme directe .
   (d) Définir F et G sont supplémentaires dans E (On notera $E = F \oplus G$) .
   (e) Montrer que $E = F \oplus G \Longleftrightarrow \forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in F \times G : x = x_1 + x_2$ (c'est à dire tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G) .

Exercice 2 : Questions à choix multiples (QCM)

Chaque question propose 4 possibilités de réponses . Chaque question comporte exactement zéro , une ou deux réponse(s) exacte(s). À chaque question l'élève a donc le choix avec justification à l'appui entre :
•Sélectionner la seule réponse qu'il juge bonne entre les 4 proposées
•Sélectionner les deux seules réponses qu'il juge bonne parmi les 4 proposées
• Considérer qu'aucune des réponses proposées n'est bonne .

1. Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel réel E . Supposons l'existence d'un élément $x \in E$ tels que $x \in F$ et $x \notin G$.
   (a) Si $F \subset G$, alors $F \cup G$ est un sous espace vectoriel de E .
   (b) $\forall g \in G, (F \cup G$ sous espace vectoriel de $E \Longrightarrow x + g \in F)$.
   (c) Si l'assertion B est vraie , $F \cup G$ ne peut être un sous espace vectoriel de E .

(d) $F \cup G$ ne peut être un sous espace vectoriel de E que si $F \subset G$.

2. Les parties suivantes sont-elles des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:
   (a) $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y \geq 0\}$.
   (b) $F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 0\}$.
   (c) $F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = y \geq 0\}$.
   (d) $F_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y = 3\}$.

3. Soit , dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, les vecteurs : $u(1,2,3,0)$, $v(0,-1,2,-2)$, $w(3,7,7,2)$ et $t(1,2,3,1)$. Soit $F = Vect(u,v,w)$ le sous espace vectoriel engendré par (u,v,w) et $H = \mathbb{R}t$ la droite dirigée par t .Soient $G = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 / a + b - d = 0\}$ et $K = \{(\alpha, -\alpha + 3\beta, 3\beta, 2\alpha - 2\beta)/(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
   (a) F et G sont des sous espaces vectoriels de dimension 3 .
   (b) $G \cup H$ est un sous espace vectoriel de E .
   (c) H est un supplémentaire de G .
   (d) K est un sous espace vectoriel de dimension 2 , et $\mathbb{R}^4 = F \oplus K$

4. Soit I une partie de $\mathbb{R}$, On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications de I dans $\mathbb{R}$.
   (a) (chx, shx) est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (b) $\forall a \in \mathbb{R}$, (chx, shx, e^{ax}) est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1, lnx, (lnx)^2, ..., (lnx)^n)$ est une famille libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.
   (d) $(1, arctanx, arctan\frac{1}{x})$ est une famille liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$

Exercice 3 :

1. Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0 \ \ et \ \ 2x - y - z = 0\}$ et
   $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}$ deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Soient $a(1,0,1)$; $b(1,1,1)$ et $c(0,2,1)$.
   (a) Montrer que F et E sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer une famille génératrice de E et montrer que cette famille est une base E .
   (c) Montrer que la famille $\{b, c\}$ forme une base de F .
   (d) Montrer que la famille $\{a, b, c\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
   (e) A t'on $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$.
   (f) Soit $u(x,y,z)$, exprimer u dans la base $\{a, b, c\}$.

2. Soit $a(2,-1,1,2)$, $b(2,-1,6,1)$ et $c(6,-3,8,5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
   Soit $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / -7x + z + 5t = 0$ et $x + y = 0\}$ et $F = vect(a,b,c)$.
   (a) Montrer que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Montrer que la famille (a,b,c) est liée et donner une base de E et une base de F .
   (c) Montrer que la famille(a,b,d,e) est liée où $d(1,-1,7,0)$ et $e(0,0,5,-1)$ et déduire qu'on a pas $\mathbb{R}^4 = E \oplus F$.

3. Soit $\mathbb{R}_2[X]$ espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficient dans $\mathbb{R}$. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(1) = 0\}$.
   (a) Montrer que E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Montrer que la famille $(X^2 - 1, X - 1)$ est une famille libre de E .

(c) Déterminer une base de E et déduire $dimE$.

Exercice 4 : Soit P le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations linéaires suivant : $(P)\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+2z+t=0 \end{cases}$. Soient $v_1(1,1,1,1)$ et $v_2(1,0,1,0)$. On note $V = vect(v_1, v_2)$ le sous espace vectoriel engendré par v_1 et v_2 .

1. Déterminer une base (u_1, u_2) de P et justifier que $dimP = 2$.
2. Montrer que (v_1, v_2) est une base de V .
3. Montrer que $P+V = vect(u_1, u_2, v_1, v_2)$. En déduire une base de $P+V$.
4. En déduire que P et V ne sont pas supplémentaires et donner une base de $P \cap V$.
5. Soit $v_3(1,1,0,0)$ et on note $W = vect(v_1, v_3)$.
   (a) Montrer que P et W sont supplémentaires .
   (b) Expliciter la projection sur W parallèlement à P .

Exercice 5 :

1. Soit un espace vectoriel réel E et f un endomorphisme de E . Soient deux réels distincts a et b tel que $(f - a \times id_E) \circ (f - b \times id_E) = 0$ où id_E est l'endomorphisme identité de E .
   (a) On souhaite montrer que $E = Ker(f - a \times id_E) \oplus Ker(f - b \times id_E)$.
      i. Montrer que $Ker(f - a \times id_E) \cap Ker(f - b \times id_E) = \{0_E\}$.
      ii. En remarquant que $\forall x \in E$, on a $x = \dfrac{1}{b-a}(f(x) - ax) + \dfrac{1}{a-b}(f(x) - bx))$. Montrer que $E = Ker(f - a \times id_E) + Ker(f - b \times id_E)$.
      iii. Déduire alors que $E = Ker(f - a \times id_E) \oplus Ker(f - b \times id_E)$
   (b) Choisir la bonne réponse .
   La restriction de f à $Ker((f - a \times id_E))$ et à $Ker((f - b \times id_E))$ est :
      i. Une translation de vecteurs de translation respectifs $\vec{u}(1, a)$ et $\vec{v}(1, b)$.
      ii. Une homothétie de rapport respectif a et b .
      iii. Une symétrie centrale de centre respectif $\Omega(a, 0)$ et $\Omega'(b, 0)$.
2. Soit un espace vectoriel E et F , G et H trois sous espaces vectoriels de E tels que : $\begin{cases} F+G = F+H \\ F \cap G = F \cap H \\ G \subset H \end{cases}$. On aimerait savoir si on a toujours $G = H$
   (a) Soit $h \in H$ montrer que on peut trouver $f \in F$ et $g \in G$ tel que $h = f + g$.
   (b) Déduire de l'égalité $f = h - g$ que $h \in F$.
   (c) Déduire de la question b que $H \subset F$ et que $H \subset G$.
   (d) Conclure à partir des questions a , b et c .
3. Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_n converge\}$ .On note F l'ensemble des suites constantes et G l'ensemble des suites convergents vers 0 .
   (a) Montrer que F et G sont des sous espaces vectoriels de E .
   (b) Montrer que $F \cap G = \{(0_n)_n\}$ (suite nulle)
   (c) Déduire que $E = F \oplus G$ .On remarquera que si une suite $(u_n)_n$ convergent vers un réel l on peut écrire : $u_n = (u_n - l) + l$.

Exercice 6 :

1. Soit E un espace vectoriel et I l'endomorphisme identique de E .On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E tel que $p^2 = p$ . .
   (a) Montrer que si p est un projecteur alors $I - p$ est aussi un projecteur .
   (b) Montrer que si p est un projecteur alors $p(I - p) = (p - I)p = 0$.
   (c) Montrer que si $p(I - p) = (I - p)p = 0$ alors p est un projecteur .
   (d) Montrer que si p est un projecteur alors $E = Kerp \oplus Imp$.
   (e) Soit $E = \mathbb{R}^2$ et l'endomorphisme f de E défini pâr : $f(x, y) = (x - y, y - x)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   Déterminer Imf et $Kerf$; f est- il un projecteur ? .
2. Pour tout couple de réels , on définit la fonction $h_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $h_{a,b}(x) = (ax+b)e^{-2x}$. On désigne par E l'ensemble de toutes les fonctions $h_{a,b}$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que pour tout $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $h_{a,b} + h_{c,d} \in E$ et $\lambda h_{a,b} \in E$.
   (b) On admet que E est un espace vectoriel et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = e^{-2x}$ et $v(x) = xe^{-2x}$. Soit $B = (u, v)$.
      i. Montrer que B est une famille libre de E .
      ii. Montrer que B forme une base de E.
      iii. Montrer que $f(x) = 2xe^{-2x+2}$ est un élément de E et déterminer les coordonnées de f dans la base B .
   (c) Soit φ l'application qui à tout h associe $\varphi(h) = h' - h$, où h' est la dérivée de h .
      i. Montrer que pour tout $h \in E$, $\varphi(h) \in E$.
      ii. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
      iii. Déterminer la matrice M de φ par rapport à la base B .
   (d) Déterminer l'élément g de E solution de l'équation différentielle $y' - y = (-3x+4)e^{-2x}$.

Exercice 7 : On note par $\mathbb{F}$ l'espace vectoriel des fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et continues ; et par $\mathbb{F}_2$ l'ensemble défini par : $\mathbb{F}_2 = \{f \in \mathbb{F} / f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x, a; b; c \in \mathbb{R}\}$

1. Montrer que $(\mathbb{F}_2, +, \bullet)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{F}$.
2. Soient f , g et h des fonctions de $\mathbb{F}_2$ définies par $f(x) = x^2e^2$, $g(x) = xe^x$ et $h(x) = e^x$ .Montrer que (f, g, h) est une famille libre et génératrice de $\mathbb{F}_2$ et déduire $dim\mathbb{F}_2$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{F}_2 \longrightarrow \mathbb{F}_2$; pour tout $S \in \mathbb{F}_2$, $\varphi(S) = S' - S$.
   (a) Montrer que φ est une application linéaire .
   (b) Déterminer la matrice M de φ dans la base (f, g, h) . φ est elle bijective ? .
   (c) Déterminer $Ker\varphi$.
   (d) On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\varphi(t) = (t^2 + 1)e^t$.
      i. Déterminer un élément m de $\mathbb{F}_2$ solution de l'équation (E) .
      ii. Déduire la solution générale de (E) .
      iii. Une solution de (E) est-elle toujours élément de $\mathbb{F}_2$?

APPLICATIONS DE L'ESPACE

Exercice 1

1) Donner dans l'espace, l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}(-3;2;-4)$.

2) L'expression analytique d'une application de l'espace est $\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+5 \\ z' = z-3 \end{cases}$

   a) Donner sa nature et son élément caractéristique.

   b) Déterminer l'image de $A(5;2;-1)$ et l'antécédant de $B(3;2;-2)$ par cette application.

   c) Déterminer l'image de la droite (AB) par cette application.

Exercice 2 :

L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = -3x-4 \\ y' = -3y+8 \\ z' = -3z-8 \end{cases}$

a) Déterminer les coordonnées du point invariant par f.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

c) Déterminer l'image de $A(5;2;-1)$ et l'antécédant de $B(3;2;-2)$ par cette application.

Exercice 3

Dans un repère de l'espace, $A(1;-1;-2)$ et $\vec{u}(-1;2;1)$. On suppose que $k=3$

1) Quelle est la nature et un élément caractéristique de $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;k)}$, puis de $h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}$?

2) Déterminer l'expression analytique de $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;k)}$ et de $h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}$.

3) Déduire le 2^{e} élément caractéristique de $t_{\vec{u}} \circ h_{(A;k)}$ et de $h_{(A;k)} \circ t_{\vec{u}}$. Que constatez-vous ?

Exercice 4

Dans un repère de l'espace, $A(1;-1;-2); B(2;2;1)$. On suppose que $k=3$ et $k'=-2$

1) Quelle est la nature et un élément caractéristique de $h_{(A;k)} \circ h_{(B;k')}$, puis de $h_{(B;k')} \circ h_{(A;k)}$?

2) Déterminer l'expression analytique de $h_{(A;k)} \circ h_{(B;k')}$, puis de $h_{(B;k')} \circ h_{(A;k)}$

3) Déduire le 2^{e} élément caractéristique de $h_{(A;k)} \circ h_{(B;k')}$, puis de $h_{(B;k')} \circ h_{(A;k)}$. Que constatez-vous ?

Exercice 5

Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale f sur $(\mathcal{P}): x-3y+2z-3=0$

Exercice 6

Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale g sur la droite (D)passant par $A(1;-2;-1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-2;3)$

Exercice 7 L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x+y-z-3) \\ y' = \frac{1}{3}(x+2y+z+3) \\ z' = \frac{1}{3}(-x+y+2z-3) \end{cases}$

1) Justifier que f est une application affine.
2) Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f
3) Justifier que pour tout point M de l'espace, si $f(M) = M'$, alors $M' \in$ (P) et que si $M \notin (P)$, alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P).
4) Déduire la nature de f
5) Vérifier que $f \circ f = f$

Exercice 8 L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x+4y-2z+6) \\ y' = \frac{1}{3}(-x-2y+z-6) \\ z' = \frac{1}{3}(-3x-6y+3z-6) \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f.
2) Justifier que pour tout point $M \notin (D)$ d'image M' par f,
   a) Le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D).
   b) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (D).
3) Déduire la nature et l'élément caractéristique de f.

Exercice 9

Déterminer l'expression analytique de la réflexion d'axe $(P): -x+2y-3z+1=0$

Exercice 10

L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = \frac{1}{7}(-2x-3y+6z-3) \\ y' = \frac{1}{7}(-3x+6y+2z-1) \\ z' = \frac{1}{7}(6x+2y+3z+2) \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f.
2) Justifier que pour tout point $M \notin (P)$ d'image M' par f,
   a) Le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (P).

b) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P).

3) Déduire la nature et l'élément caractéristique de f.

Exercice 11

1) Justifier que les plans $(P): x - 2y + z - 3 = 0$ et $(P'): 2x + y - 3z - 1 = 0$ sont sécants suivant une droite (D).

2) Déterminer l'expression analytique du demi-tour d'axe (D): $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$

Exercice 12

L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = -x - 4 \\ y' = -3y + 4z - 4 \\ z' = -2y + 3z - 2 \end{cases}$

1) Déterminer l'ensemble (D) des points invariants par f.

2) Justifier que pour tout point $M \notin (D)$ d'image M' par f,

   a) Le milieu I du segment $[MM']$ appartient à (D).

   b) Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction orthogonale à (D).

Déduire la nature et l'élément caractéristique de f.

Exercice 13

$ABCDEFGH$ est un cube. $I; J; K$ et L les milieux respectifs des segments $[EF]$; $[GH]$; $[CD]$ et $[AB]$.

Compléter :

$S_{(AD)} \circ S_{(KL)} = \cdots$; $S_{(AB)} \circ S_{(AD)} = \cdots$; $S_{(AB)} \circ S_{(DHE)} = \cdots$; $S_E = S_{(EH)} \circ \ldots$

$S_H = S_{(EFG)} \circ \ldots$; $S_{(ADH)} \circ S_{(IJK)} = \cdots$. ;$S_{(ABC)} \circ S_{(BCG)} = \cdots$; $S_{(AB)} = S_{(FB)} \circ \ldots$

Exercice 14 : ***Recherche des plans et axes de symétrie d'un cube***

$ABCDEFGH$ est un cube de centre O et f une transformation laissant invariant le cube.

1) Déterminer $f(O)$.

2) ***Plans de symétrie du cube*** : Soit (P) un plan de symétrie du cube et $S_{(P)}$ la réflexion d'axe (P)

   a) Justifier qu'au moins un des sommets du cube n'appartient pas à (P) et a pour image par $S_{(P)}$ un autre sommet du cube. Comment peut-on encore voir (P)?

b) Dénombrer tous les cas favorables, puis sélectionner tous les cas possibles pour (P) en considérant les plans médiateurs :

- des arrêtes du cube
- des diagonales des faces du cube
- des diagonales du cube.

3) ***Axes de symétrie du cube*** : Soit (P) un plan de symétrie du cube et (D) la droite passant par O et perpendiculaire à (P).

a) Caractériser $S_{(P)} \circ S_{(D)}$et déduire une décomposition de $S_{(D)}$.

b) Montrer que $S_{(D)}$ est un axe de symétrie du cube.

c) Citer au moins neuf axes de symétrie du cube.

d) Soit (D') un autre axe de symétrie du cube et (P') la perpendiculaire à (D') en 0.

- Caractériser $S_{(P')} \circ S_0$ et décomposer $S_{(P')}$
- Justifier que (P') est un plan de symétrie du cube
- Conclure.

Exercice 15 : ***Recherche des plans et axes de symétrie d'un tétraèdre régulier.***

ABCD est un tétraèdre régulier de centre 0. Soient $I; J; K; L; M$et N les milieux respectifs des segments $[AB]; [CD]$; $[AC]; [BD]; [AD]$ et $[BC]$.

1) **Plans de symétrie du tétraèdre.**

Soit (P) un plan de symétrie du tétraèdre.

a) Justifier que (P) est le plan médiateur d'une paire de sommets.

b) Justifier que la droite (BD) est perpendiculaire au plan (ACL) et que les arrêtes opposées (BD) et (AC) sont orthogonales.

c) Peut-on dire que tout plan médiateur d'une arrête passe par les deux autres sommets du tétraèdre ?

d) Citer **les** six plans de symétrie du tétraèdre régulier.

2) **Axes de symétrie du tétraèdre.**

a) Regrouper les plans de symétrie du tétraèdre en paire de plans perpendiculaires.

b) Soient (P) et (P') deux plans de symétries perpendiculaires du cube.

- Donner la nature de $S_{(P)} \circ S_{(P')}$.
- Justifier que $S_{(P)} \circ S_{(P')}$ est un axe de symétrie du tétraèdre.
- Citer ***trois*** axes de symétrie du tétraèdre.

(on pourra admettre que ces trois axes sont les seuls axes de symétrie du tétraèdre régulier)

MINESEC

(GPM/CLUSTER)

TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES

Thème: APPLICATIONS LINEAIRES ET MATRICES

CLASSE : TERMINALE C

Proposé par HENRI SIYAPDJE

Exercice1

On considère l'application $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definie par $f(z) = 2\,z + \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$
On admet que $(1,\ i)$ est une base de $\mathbb{R}$ −espace vectoriel $\mathbb{C}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Ecrire la matrice de f dans la base $(1,\ i)$.
3. Déterminer Kerf et Imf.

Exercice2

E est un $\mathbb{R}$ −espace vectoriel de dimension 3, $B = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ une base de E, $\vec{n} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ un vecteur de E

Soit $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(\vec{u}) = \vec{n} \wedge \vec{u}$

1) Montrer que f est un endomorphisme bijectif, puis en déduire Kerf et Imf
2) Donner la matrice de f dans la base B.
3) Donner l'expression analytique de f.
4) Soit λ un nombre réel ; déterminer suivant les valeurs de λ l'ensemble $E_{\lambda} = \{\vec{u} \in E / f(\vec{u}) = \lambda\,\vec{u}\}$.

Exercice3

E est un espace vectoriel réel de dimension 3. $\beta = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de . soit f l'application définie de E vers E par : pour $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base β, on a $f(\vec{u}) = (2x - y)\vec{\imath} + (2y - z)\vec{\jmath} + (2z - 8x)\vec{k}$

a) Montrer que f est un endomorphisme de E
b) Donner l'expression analytique de f
c) Déterminer le noyau $N(f)$ et l'image $Im(f)$ puis dire si f est un automorphisme de E.
d) On pose $\vec{e}_1 = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{e}_2 = \vec{\imath} - 4\vec{k}$ et $\vec{e}_3 = \vec{\jmath} - 2\vec{k}$ Montrer que $\beta' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de E
e) Ecrire la matrice de f dans la base β'

Exercice 4

Le plan vectoriel E est rapporté à une base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. Soit φ l'application linéaire de E dans E telle que, quel que soit $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, on pose

$\varphi(\vec{u}) = \left(\frac{5}{3}x - \frac{4}{3}y\right)\vec{\imath} + \left(\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}y\right)\vec{\jmath}.$

1) Montrer que φ est un automorphisme de E.

2) Déterminer l'ensemble E_1 des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\varphi(\vec{u})= u$. (on donnera une base $\overrightarrow{e_1}$ de E_1).
3) Déterminer l'ensemble E_{-1} des vecteurs $\vec{u}$ tels que $\varphi(\vec{u})= -\vec{u}$. (On donnera une base $\overrightarrow{e_2}$ de E_{-1}).
4) a) Déterminer la matrice A de f dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.
b) Montrer que $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est une base de E et déterminer la matrice A' de f dans la base $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
c) Calculer det A et det A' et comparer ces deux réels.

Exercice5

Soit E un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ une base de E. On considère l'application f de E dans E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath}+$ y $\vec{\jmath}$ de E fait correspondre le vecteur $\vec{u}' = x'\vec{\imath}+$ y' $\vec{\jmath}$ de E tel que $\begin{cases} x' = 3x - 5y \\ y' = 2x + 7y \end{cases}$.

On considère l'application g de E dans E qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath}+$ y $\vec{\jmath}$ de E fait correspondre le vecteur $\vec{U} = X\vec{I}+$ Y $\vec{\jmath}$ de E tel que $\begin{cases} X = 2x + y \\ Y = x - 2y \end{cases}$.

1) Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.
2) Déterminer les noyaux respectifs $N(f)$ et $N(\mathrm{g})$ de f et de g.
3) On pose $h = \mathrm{g} \circ f$ et $k = f + \mathrm{g}$
a) Déterminer la matrice de chacune des applications h et k.
b) h et g sont-ils des endomorphismes bijectifs ? Justifier.
c) Calculer les coordonnées x'' *et* y'' de l'image d'un vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath}+$ y $\vec{\jmath}$ par h.
4) Soient f^{-1} et g^{-1} les bijections réciproques de f et de g.
a) Quelles sont les coordonnées (x_1, y_1) du vecteur $\vec{u}_1$, transformé du vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath}+$ y $\vec{\jmath}$ par f^{-1} ?
b) Quelles sont les coordonnées $(x_2{}', y_2{}')$ du vecteur $\vec{u}_2$ transformé du vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath}+$ y $\vec{\jmath}$ par g^{-1} ?
c) Quelles sont les coordonnées (α, β)du vecteur $\vec{w}$ transformé du vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath}+$ y $\vec{\jmath}$ par l'application $\varphi = (f^{-1} \circ \mathrm{g}^{-1})$?
4) Quel est le transformé du vecteur $\vec{u}$ par $h \circ \varphi$?.

Exercice6

Soit M la matrice d'un endomorphisme g d'un espace vectoriel E dans la base $B = (\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ on pose $\vec{e}_1 = -\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{e}_2 = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

1. Montrer que $B' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est une base de E.
2. Ecrire la matrice A de g dans la base B', puis vérifier que $A = P^{-1}MP$ où $P = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et P^{-1} la matrice inverse de P.
3. Déterminer A^n en fonction de n où $n \in \mathbb{N}^*$

MINESEC

Travaux Dirigés De Mathématiques

Thème : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Classe : Terminale « C»

Proposée par Sambalis NJONTCHOU NANA

Exercice 1

QCM : choisir la bonne réponse

1) La fonction : $x \to 2e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle

a) $y' = 4y$ b) $y' = -4y$ c) $y' = 2y$

2) Si f est la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ telle que $f(0) = 1$ alors la courbe de f admet une tangente

a) horizontale b) parallèle a $y = 2x$ c) parallèle a $y = -x$

3) Si f est la solution différentielle $y' = -y + 1$ telle que $f(0) = 1$ alors la fonction f est :

a) négative b) positive c) n'a pas un signe constant

4) la fonction $x \to 2\cos x - 3sinx$ est solution de l'équation différentielle

a) $y'' + 2y = 0$ b) $y'' + y = 0$ c) $y'' + 3y = 0$

Exercice 2

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

1) la fonction $f : x \to 2^x$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y\, ln2 = 0$
2) si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l équation différentielle $y' = -2y$ alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$
3) si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ telle que $f'(1) = 3$ alors $f(1) = 1$
4) Si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$ qui s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{4}$ alors sa courbe dans un repère orthonormé admet un point d'inflexion

Exercice 3

On considère l'équation différentielle $(E)\ y' + 2y = e^{-2x}$

1) Vérifier que la fonction g $:x \to (x+1)\, e^{-2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de (E)
2) Démontrer qu'une fonction $f + g$ est solution de (E) si et aucunement si la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$
3) En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E)

Exercice 4

Soit la fonction f $:x \to (1+x)e^{-2x}$

1) Déterminer les nombres réels a et b pour que f soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) ; $y'' + ay + by = 0$
2) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul , la dériver d'ordre n de f est solution de (E)
3) Déterminer parmi les primitives de f, celle qui est solution de (E)

Exercice 5

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l' équations différentielle (E) : $y'' - 4y = 0$
2) Démontrer que l'équation différentielle (E) :
   $y'' - 4y = 4(x-1)^2 - 2$ admet sur $\mathbb{R}$ une et une seule solution, qui soit une fonction polynôme p de degré 2
3)
   a) démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - p$ est solution de (E)
   b) en déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E'), puis celle qui vérifie : $f(0)\ et\ f'(0) = 0$

Exercice 6

Soit l'équation différentielle (E) $y'' + 2y' + 5y = 30\cos x$

1) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction :

   $x \to a\cos x + b\sin x$ soit une solution de (E)

2) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$
3) Résoudre l'équation (E)

Problème :

A) On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) :$y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

1) Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$, et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}g(x)$.
   a) Calculer $g(0)$
   b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$
   c) Montrer que f est une solution de (E), si et seulement si, $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
   d) En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution (E) .

B) En 2000, une étude est effectuée sur un échantillon de cette population dont l'effectif initial est égal à mille.

Cet échantillon évolue et son effectif, exprimé en milliers d'individus, est approché par une fonction f du temps t (exprimé en années à partir de l'origine 2000).

D'après le modèle d'évolution choisi, la fonction f est dérivable, strictement positive sur $[0;\ +\infty[$, et satisfait l'équation différentielle :

(E) $y' = -\dfrac{1}{20}y(3 - \ln y)$

1. Démontrer l'équivalence suivante :
   Une fonction f, dérivable, strictement positive sur $[0;\ +\infty[$, vérifie, pour tout t de $[0;\ +\infty[$, $f'(\mathrm{t}) = -\frac{1}{20}f(t)[3 - \ln f(t)]$ si et seulement si fonction $g = \ln(f)$ vérifie, pour tout t $[0;\ +\infty[$, $g'(\mathrm{t}) = -\frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20}$
2. Donner la solution générale de l'équation différentielle :
   (H) : $z' = -\frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$
3. En déduire qu'il existe un réel C tel que, pour tout t de $[0;\ +\infty[$:
   $f(t) = exp(3 + C\ exp(t/20))$
   $(la\ notation$ exp $désigne\ la\ fonction\ exponentielle\ naturelle\ z \to e^z)$
4. La condition initiale conduit donc à considérer la fonction f définie par : $f(t) = exp\left(3 - 3exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$
   a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$
   b) Déterminer le sens de variation de f sur $[0;\ +\infty[$

c) Résoudre dans $[0;\ +\infty[$ l'inéquation $f(t) < 0{,}02$

d) Au bout de combien d'année, selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera – t-elle inférieur à vingt individus

MINESEC

Travaux dirigés de Mathématiques

Thème : **Calculs des probabilités**

Classe : **Terminale C**

De : **Rigobert Deh Nkengni**

ANALYSE COMBINATOIRE :

Soit une urne contenante n boules. On se propose de tirer k boules de l'urne avec $1 \leq k \leq n$. Les n boules sont supposées discernables (par exemple numérotées).

- **Tirages simultanés**

Si les k boules sont tirées simultanément, le résultat d'un tirage est une partie de k éléments, il y a donc $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ tirages possibles.

- **Tirages successifs sans remise**

Si les k boules sont tirées successivement et sans remise, le résultat d'un tirage est un arrangement de k éléments parmi n, il y a au total $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$ tirages possibles.

- **Tirages successifs avec remise**

On tire une boule, on note son numéro et on la remet dans l'urne, et on recommence un autre tirage.

On est donc dans les mêmes conditions à chaque tirage, soit n boules dans l'urne. On a donc n^k tirages possibles.

Exercice 1 :

Compléter les pointillés suivants.

Une urne contient 10 boules : 2 bleues, 5 noires, 3 rouges.

A- On effectue **trois tirages successifs et sans remise.** On peut représenter cette situation par un arbre ou par des cases.

1. Le nombre de tirage possible es…………………………………………………………………………………….
2. Le nombre de tirage contenant exactement deux boules rouges est……………………………………….
3. Le nombre de tirage contenant des boules de unicolores est……………………………………………….
4. Le nombre de tirage contenant des boules multicolores est………………………………………………
5. Le nombre tirage contenant au moins une boule rouge est…………………………………………………

B- On effectue **trois tirages simultanés.**

1. Le nombre de tirage possible est : …………………………………………………………………………………….
2. Le nombre de tirage contenant exactement deux boules rouges est……………………………………….
3. Le nombre de tirage contenant des boules de unicolores est……………………………………………….
4. Le nombre de tirage contenant des boules multicolores est………………………………………………
5. Le nombre tirage contenant au moins une boule rouge est…………………………………………………

C- Quel constat peut-on faire ?

EXERCICE 2 :

On lance un dé bien équilibré donc les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

1. Peut-on être fixé sur le résultat avant que le dé ne se stabilise complètement ?
2. Comment appelle-t-on ce type d'expérience ? citer trois autres dans la vie courante.
3. Donner la liste des résultats possible.
4. Que représente chacun des sous-ensembles suivants $\{5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,4,6\}$ $\{1,2,3,4,5,6\}$, $\{0,7\}$?
5. Donner les résultats qui sont favorables aux contraintes suivantes :
   A : le chiffre obtenu est pair et impair »   B : « le chiffre obtenu est supérieure à 3 »

On appelle **expérience aléatoire** toute expérience dont le résultat est soumis au hasard.
Exemple : le lancer de dé, le lancer de la pièce de monnaie, ……
On appelle **univers des possibles** d'une expérience aléatoire l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience. On le note en général Ω.
Exemple : Pour le lancer de dé $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
Etant donnée une expérience aléatoire, **un événement** est une partie de l'univers des possibles Ω.
Exemple : On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, on s'intéresse au numéro sur la face supérieure lorsqu'il est retombé. On a : $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. Soit A l'événement « la face supérieure du dé porte un multiple de 3 », on a $A = \{3;\ 6\} \subset \Omega$.

- On appelle **événement élémentaire** d'une expérience aléatoire tout singleton de l'univers des possibles.

Tous ensemble non vide de l'univers des possibles d'une expérience aléatoire est réunion des événements élémentaires.
L'événement impossible d'un univers Ω est la partie vide de Ω notée $\emptyset$.
L'événement certain d'un univers Ω est la partie pleine de $\Omega = \Omega$.
Deux événements A et B d'un univers Ω sont dits **incompatibles** lorsque l'événement $A \cap B$ est impossible.
A est un événement d'un univers Ω. On appelle **événement contraire** de A l'ensembles des événements élémentaires de Ω qui ne sont pas dans A. On le note $\bar{A}$.

Soit Ω un univers fini non vide, on appelle probabilité d'un événement, une application de Ω vers $[0,1]$.
Ainsi soit A un événement.

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- La probabilité de l'événement certain est 1.
- La probabilité de l'événement impossible est 0
- Lorsqu'il a équiprobabilité la probabilité d'un événement est : $P(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)}$
- Soient A et B deux événements $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si A et B sont deux événements incompatibles alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Probabilité d'événements contraires : $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\left(A\right)$

EXERCICE 3 :

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 6. On tire au hasard une boule de l'urne et on note son numéro.

1. Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre pair.
2. Quelle est la probabilité d'avoir un chiffre plus grand que 4.

EXERCICE 4 :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes comprenant quatre "couleurs" : les piques, les trèfles, les carreaux et les cœurs. Chaque "couleur" est composée de huit cartes de la façon suivante : Un as, un roi, une dame, un valet, un 10, un 9, un 8 et un 7. Quelle est la probabilité de tirer un trèfle ? un as ? la dame de cœur ? une carte rouge ? (le pique et le trèfle sont noirs, le carreau le cœur sont rouges).

EXERCICE 5 :

Un sac contient dix boules indiscernables au touché dont 6 rouges et 4 noires. On tire simultanément au hasard 3 boules du sac et on note leur couleur. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants

- A : « les trois boules contiennent au moins un rouge »
- B : « les trois boules contiennent au plus un rouge »

EXERCICE 6 :

Un sac contient 8 boules indiscernables au touché dont
5 rouges et 3 noires. On tire au hasard une boule du sac, on note sa couleur, on la remet dans le sac. Puis, on tire au hasard une deuxième boule et on note sa couleur. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

B : « les deux boules tirées sont de la même couleur ».

EXERCICE 7 :

Pour prévenir l'extension d'une certaine maladie, on vaccine 60% d'une population à risque. Le vaccin n'étant pas totalement infaillible, 10% des personnes vaccinées attrapent la maladie. En revanche 30% des individus non vaccinés ne sont pas malades.

1. On choisit une personne au hasard. Quelle est la probabilité
   a) Qu'elle soit malade sachant qu'elle est vaccinée ?
   b) Qu'elle soit malade et vaccinée ?
   c) Qu'elle contracte la maladie ?
2. Calculer la probabilité qu'un individu bien portant soit vacciné.

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire, B un événement de Ω tel que $P(B) \neq 0$. P étant la probabilité définie sur Ω. On appelle **probabilité conditionnelle relative à B** l'application P_B définie sur l'ensemble des parties de Ω et à valeur dans $[0,1]$ par :

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- Il ne faut pas confondre la notion d'événements indépendants et d'événements incompatibles. Deux événements peuvent être indépendants sans être incompatibles et inversement.

EXERCICE 8 :

On lance deux fois de suite un dé cubique et on s'intéresse aux chiffres apparus sur la face supérieure du dé.

1. Définir l'univers des possibles.
2. On définit une application $X:\Omega \to \mathbb{R}$ et $(i, j) \to X(i, j) = i + j$ (X est une variable aléatoire définit sur Ω.
   a) Donner l'ensemble des éléments de $[X = 2]$; $[X = 5]$ et $[X = 11]$.
   b) Donner l'ensemble des éléments de $[X < 5]$, $[X < 13]$ et $[X > 1]$.
3. Soit P une probabilité définie sur un univers Ω. On définit l'application P_X de $X(\Omega)$ vers $[0, 1]$ telle que pour tout x_i de $X(\Omega)$ associe $P_X(x_i) = P_i = P[X = x_i]$. P_X est appelé loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   Dans la pratique, on définit cette loi par un tableau de façon suivante :

x_i	x_1	x_2	……	x_p	……	x_{n-1}	x_n
P_i	P_1	P_2	…….	P_p	……	P_{n-1}	P_n

   a) Compléter le tableau suivant relative à la variable aléatoire définit à la question 2:

x_i	2	3	4	5	6	7	8
P_i							

   b) Construire le diagramme en bâton relative au tableau ci-dessus 3a).
4. Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une probabilité P. On appelle fonction de répartition de X l'application : $F:\mathbb{R} \to [0,1]$ et $x \mapsto P[X \le x]$

a) Pour le lancer deux fois de suite du dé cubique. Donner la valeur exacte de $F(x)$.
- Pour tout $0 < x < 2$, $F(x) = \cdots$.
- Pour tout $2 < x < 3$, $F(x) = \cdots$.
- Pour tout $3 < x < 4$, $F(x) = \cdots$.
- Pour tout $4 < x < 5$, $F(x) = \cdots$.
- Pour tout $5 < x < 6$, $F(x) = \cdots$.
- Pour tout $6 < x < 7$, $F(x) = \cdots$.
- Pour tout $7 < x < 8$, $F(x) = \cdots$.
- Pour tout $8 < x$, $F(x) = \cdots$.

b) Représenter le **diagramme cumulatif** ou le **diagramme en escalier** de la variable aléatoire X définit à la question 2.

5. Soit la loi de probabilité de X définit à question 2.

x_i	x_1	x_2	……	x_p	……	x_{n-1}	x_n
P_i	P_1	P_2	…….	P_p	……	P_{n-1}	P_n

- On définit le nombre $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$ appelé **espérance mathématique**.
- On définit le nombre positif $V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} x^2_i P_i\right) - [E(X)]^2$ appelé **variance**.
- On définit le nombre positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ appelé **écart type**.

   a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, relatif au lancer de dé.
   b) Calculer la variance et l'écart type.

Remarques :

- Lorsque les valeurs prises par X sont des gains d'un jeu de hasard, alors $E(X)$ traduit l'espérance de gain moyen par partie lorsqu'on joue.
- Un **jeu équitable** est un jeu où l'espérance de gain est nulle.
- Un jeu où l'espérance de gain est positive avantage le joueur, contrairement à un jeu ou l'espérance de gain est négative.

EXERCICE 9 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.
U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un nombre entier supérieur ou égal à 1).
U_2 contient deux boules blanches et une boule noire. On tire une boule au hasard de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
2. On considère l'événement A : "Après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ".
   a) Démontrer que la probabilité p(A) de l'événement A peut s'écrire : $P(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$
   b) Déterminer la limite de $P(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère l'événement B : "Après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche".
Calculer $P(B)$.
4. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve.
A l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches dans U_2.
- Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit 2n francs ;
- Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
- Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.
Dans la suite, on considère $n > 10$, et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeur les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche,
$X = 2n - 20$).
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
c) Calculer l'espérance mathématique de X.
d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

EXERCICE 10 :

On vise une cible en lançant de manière indépendante n projectiles. Chaque projectile a la probabilité p d'atteindre la cible. ($0 < p < 1$). On considère les évènements suivants :
A : « Aucun projectile n'atteint la cible »
B : « Au moins un projectile atteint la cible ».
On note P(A) et P(B) les probabilités de ces évènements.

1. Exprimer P(A) en fonction de n et p. Puis en déduire P(B).
2. On souhaite avoir $P(B) < 0{,}999$. On s'intéresse au nombre minimal m de projectiles à lancer pour réaliser cette condition.
   a) On suppose $p = 0{,}87$. Que vaut m ?
   b) On suppose $m = 3$. Dans quel intervalle doit se trouver p ?

Loi binomiale

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant exactement deux issues, l'une appelée en général « succès » et l'autre « échec ».

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** si X est la variable aléatoire définie par le nombre de succès obtenus en répétant n fois et de manière indépendante une épreuve de Bernouilli ; p désigne la probabilité d'un succès.

- Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors la probabilité d'obtenir exactement k succès $(0 \leq k \leq n)$ est $P\left[\left(X=k\right)\right]=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
- Si X suit la loi binomiale de paramètres n et p alors l'espérance mathématique de X est $E(X) = n.p$ et sa variance est $V(X) = n.p(1-p)$.

EXERCICE 11 :

Une urne contient 5 jetons blancs et 3 jetons rouges. Un jeu consiste à tirer simultanément 5 jetons de l'urne. Pour chaque jeton rouge tiré, le joueur gagne 100 francs et pour chaque jeton blanc tiré, il perd n francs $(n > 0)$. Soit Y la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer en fonction de n, la loi de probabilité de Y.
2. Calculer en fonction de n, $E(Y)$.
3. Déterminer n pour que le jeu soit équitable.

EXERCICE 12

Lors de l'épreuve du Bac d'Anglais, un candidat doit répondre à un QCM composé de 10 questions. Pour chacune d'elles il est proposé 4 réponses possibles, mais une seule est correcte. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des 10 questions.

1. Calculer la probabilité qu'un candidat, à l'issue de ce QCM
   a) Trouve uniquement la première question.
   b) Obtienne exactement une réponse correcte.
2. Soit X la variable aléatoire qui à toute grille de réponses rendues par un candidat, associe le nombre k de réponses correctes.
   a) Déterminer en fonction de k la probabilité qu'un candidat ait k réponses exactes.
   b) Calculer $p(X \leq 1)$ et en déduire $p(X \geq 2)$.
3. Calculer E(X). A-t-on intérêt à répondre au hasard à ce QCM ?

EXERCICE 13

Une boite contient 5 jetons : 2 jetons noirs et 3 jetons blancs indiscernables au toucher.

1. On extrait simultanément au hasard 2 jetons de la boite :
   a) Calculer la probabilité des événements suivants
   E = « on extrait 2 jetons noirs » F = « on extrait 2 jetons de même couleur »
   b) On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs obtenus.

Définir la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. On effectue un tirage successif de 2 jetons de la boite de la manière suivante :

On tire un jeton de la boite ; on note sa couleur et on la remet dans la boite en ajoutant en plus dans la boite un autre jeton de la même couleur que celui qu'on a tiré ; on tire ensuite un second jeton de la boite. Soit les événements suivants :

N1 = « on obtient un jeton noir au premier tirage ».

N2 = « on obtient un jeton noir au second tirage ».

B1 = « on obtient un jeton blanc au premier tirage ».

a) Calculer la probabilité de N2 sachant N1 : $p(N2/N1)$. Puis la probabilité de N2 sachant B1 : $p(N2/B1)$
b) En déduire $p(N2)$

EXERCICE 14

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois dés simultanément (On remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1- Calculer la probabilité qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2- Calculer la probabilité que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3- Calculer la probabilité de l'évènement E : « Les six faces rouges sont visibles ».
4- On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres. Calculer la probabilité p_n que l'évènement E soit réalisé au moins une fois. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers +∞

EXERCICE 15

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On repère n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis à la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants. On note p_n la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du $n-ième$ tirage.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche lors des n tirages.
2. Calculer les probabilités p_1, p_3 et p_4.
3. On considère les évènements suivants : B_n : « On tire une boule blanche lors du $n-ième$ tirage » et U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».
   a) Calculer la probabilité de l'évènement B_n.
   b) Exprimer la probabilité de l'évènement U_n en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n.
4. On pose $S_n = p_2 + p_3 + \cdots p_n$.
   a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a : $S_n = 1 - \left(\frac{n}{2} + 1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   b) Déterminer la limite de la suite (S_n).

EXERCICE 16 :

Dans un jeu, on pose à un candidat une question choisie au hasard entre deux catégories équiprobables : sport et musique. Martin se présente à ce jeu.

Il sait qu'il a :

- trois chances sur quatre de donner la bonne réponse s'il est interrogé en sport ;
- une chance sur quatre de donner la bonne réponse s'il est interrogé en musique.

1. Démontrer que la probabilité qu'il donne la bonne réponse est $\frac{1}{2}$.
2. La mise pour participer au jeu est $10€$. On gagne $20€$ si on donne la bonne réponse et qu'il s'agit de sport, $10€$ si on donne la bonne réponse et qu'il s'agit de musique ; on ne gagne rien si la réponse est fausse. On note X le gain net de Martin.
   a) Donner sa loi de probabilité.
   b) Calculer son espérance μ et l'interpréter.
   c) Calculer son écart-type σ.
   d) Calculer la probabilité que X soit compris entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$.

EXERCICE 17

Le sang humain est classé en 4 groupes distincts : A, B, AB et O. Indépendamment du groupe sanguin, le sang peut posséder le facteur rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur, il est dit rhésus positif (Rh^+), sinon il est dit rhésus négatif (Rh^-). Dans une étude statistique faite sur une population (P), les groupes sanguins se répartissent suivant le tableau (I). Pour chaque groupe, la population d'individus possédant ou non le facteur rhésus se répartit suivant le tableau (II)

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

(I)

Groupe	A	B	AB	O
Rh^+	82%	81%	83%	80%
Rh^-	18%	19%	17%	20%

(II)

Un individu ayant un sang du groupe O et de rhésus négatif est appelé : « un donneur universel ».

(indication : on pourra, pour répondre aux questions, se servir d'un arbre de probabilités)

ıs la population (P), on considère les événements
groupe O » ; R : « L'individu a un sang de rhésus négatif » et U : « L'individu est un donneur universel »
   a) Calculer P(O) et P(R)
   b) Calculer la probabilité pour qu'un individu de rhésus négatif soit du groupe O.
   c) Montrer que P(U) = 0,09
2. On considère *n* personnes choisies au hasard dans la population (P)
   a) Calculer en fonction de *n* la probabilité P_n pour qu'il y ait, parmi ces personnes, au moins un donneur universel.
   b) Déterminer la plus petite valeur de *n* pour laquelle on a P_n supérieure ou égale à 0,999.

EXERCICE 18

Une entreprise utilise des machines de type M constituées de deux éléments E_1 et E_2. La défectuosité d'un seul des deux éléments E_1 et E_2 suffit à mettre la machine hors service et on exclut toute autre éventualité de panne. Soient les évènements :

A : « l'élément E_1 tombe en panne » et B : « l'élément E_2 tombe en panne ».

On suppose que A et B sont deux évènements indépendants de probabilités respectives $P(A) = 0{,}08$ et $P(B) = 0{,}05$.

1. Calculer la probabilité P_1 pour que les deux éléments soient simultanément hors service.
2. Calculer la probabilité P_2 pour que la machine soit en panne.
3. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'élément hors service.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X et son écart type.

EXERCICE 19 :

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 2 = 0$. On désigne par z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution de (E).
   b) Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_1 z_2 et $\sqrt{3} + 1$. Placer ces points dans le repère et démontrer que le triangle ABC est équilatéral.
2. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = 0$.
3. On considère l'équation différentielle (1) : $ay'' - by' + cy = 0$ où a, b et c désignent 3 paramètres, éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Pour déterminer a, b et c, on lance trois fois de suite un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le chiffre marqué sur la face supérieure du dé. Le premier numéro sorti donne la valeur de a, le deuxième donne la valeur de b et le troisième celle de c.

a) Justifier que l'équation différentielle (1) a pour solution les fonctions de la forme $x \mapsto (A\cos x + B\sin x)e^x$, où A et B sont des réels si et seulement si $1 + i$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré en z, $az^2 - bz + c = 0$.

b) Calculer la probabilité de l'événement : les solutions de (1) sont les fonctions de la forme $x \mapsto (A\cos x + B\sin x)e^x$, où A et B sont des constantes réelles.

Exercice 20 :

MINESEC
Travaux Dirigés De Mathématiques
Thème : Suites numériques
Classe : Terminale "C"
Proposée par : Georges Michaël TCHOUPA

Exercice 1 :

Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_0 = 4$ et $u_0 + u_1 + u_2 = 19$.

1. Calculer la raison q de la suite (u_n) sachant qu'elle est positive.
2. Calculer u_{10} .
3. Calculer la limite de (u_n).
4. Calculer $s_6 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$.

Exercice 2 :

1. Calculer les quatre premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison -3 et de 4e terme $u_4 = 1$.
2. Calculer la raison d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de 4e terme égale à 81. En déduire la valeur du 10e terme.
3. Calculer les cinq premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de 20 termes sachant que leur somme $S = 670$ et $u_0 = 62$.
4. Déterminer les 4 premiers termes d'une suite géométrique (u_n) décroissante telle que : $\begin{cases} u_0 \times u_3 = 32 \\ u_0 + u_3 = 18 \end{cases}$. En déduire le terme général puis la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{2+3x}$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité 3 cm.

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n} \end{cases}$.

2. Représenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite (u_n).
3. Conjecturer le sens de variations de la suite (u_n).
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Étudier le sens de variations de la suite (u_n).
5. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer : v_0, v_1 et v_2.
   (b) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison.
   (c) Exprimer $v_n,$ puis u_n en fonction de n. Calculer la limite de (u_n) et conclure.

Exercice 4 :

1. Dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}_p)$ de la fonction p définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par : $p(x) = \frac{2x+1}{x+2}$.
2. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} \end{cases}$.

(a) Représenter sur l'axe des abscisses du repère, les termes : u_1, u_2 et u_3.

(b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n < 2$.

(d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 5 :

1. (a) Construire relativement à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ représentant respectivement les fonctions numériques f et g de la variable réelle x, définies par : $f(x) = \sqrt{2+x}$ et $g(x) = x$.

   (b) Déterminer le point commun à $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

2. Soit (u_n) une suite dont le premier terme est $u_0 = -2$ et dont les termes consécutifs u_n et u_{n+1} vérifient pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n < 2$.

   (b) Représenter sur l'axe des abscisses du repère, les trois premiers termes de la suite (u_n) et faites une conjecture sur ses variations.

   (c) Démontrer par récurrence que cette conjecture est réaliste.

   (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Démontrer que pour tout $n \geq 2, 2 - u_n < \frac{2-u_{n-1}}{2}$.

   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, 2 - u_n < \frac{1}{2^{n-2}}$.

   (c) Calculer la limite de la suite (u_n).

NB : Pour la courbe $(\mathcal{C})$, on pourra la déduire de la courbe de la fonction de référence : $x \longmapsto \sqrt{x}$ et pour le 3.(c), on pourra utiliser le théorème des gendarmes.

Exercice 6 :

(u_n) est la suite définie par : $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n - \frac{1}{3}u_{n-1}$.

1. Calculer u_2 et u_3

2. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Calculer : v_0 et v_1.

   (b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera son premier terme et sa raison.

3. (a) Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ en fonction de n.

   (b) Vérifier que : $u_n = 1 + S_n$ et exprimer u_n en fonction de n.

   (c) Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 7 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$.

1. (a) Montrer que : $u_0 + u_1 = 1$.

   (b) Calculer u_1 et en déduire u_0.

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n, u_n \geq 0$.

3. Montrer que (u_n) est décroissante. La suite (u_n) est-elle convergente ?

4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

   (b) En déduire, que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 8 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante et majorée par 1. Que peut-on en déduire ?
2. Montrer que pour tout entier naturel $n,$ on a : $1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1$.
   En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 9 :(60 min)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{2\,u_n - 1} \end{cases}$.

Le but de l'exercice est d'exprimer u_n en fonction de n.

1. Montrer que pour tout réel $x,\ \frac{x^2}{2x-1} > 1$.

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ et $w_n = \ln v_n$.

2. Vérifier que (v_n) et (w_n) sont bien définies.
3. Montrer que la suite (w_n) est géométrique.
4. Exprimer $w_n,$ puis v_n en fonction de n et en déduire que : $u_n = \dfrac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 10 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \geq 3,\ u_n \geq 0$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geq 4,\ u_n \geq n - 1$.
   (c) En déduire la nature de la suite (u_n).
2. On définit la suite (v_n) par : $v_n = 4u_n - 8n + 24$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique décroissante, dont on donnera la raison et le premier terme.
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.
   (c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = x_n + y_n$ où (x_n) est une suite géométrique et (y_n) est une suite arithmétique dont on précisera pour chacune, le premier terme et la raison.
   (d) En déduire l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

Exercice 11 :

(u_n) est la suite définie par : $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 10u_n - 9u_{n-1}$.

1. Calculer u_2 et u_3
2. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer : v_0 et v_1.
   (b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera son premier terme et sa raison.
3. (a) Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ en fonction de n.
   (b) Vérifier que : $u_n = 1 + S_n$ et exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 12 :

(u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 10u_n - 9u_{n-1} \end{cases}$.

1. On pose $s_n = u_{n+1} + u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que (s_n) est une suite géométrique. Exprimer s_n en fonction de n.

2. On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et $t_n = v_{n+1} - v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Exprimer t_n en fonction de s_n.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n. (Indication : calculer $T_n = t_0 + t_1 + \cdots + t_{n-1}$ de deux façons).

Exercice 13 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n) \end{cases}$.

1. Démontrer par récurrence sur n que : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$. [0.75pt]

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e\, u_n$ et en déduire la nature de la suite (u_n). [1pt]

3. Exprimer u_n en fonction de n et calculer la limite de (u_n). [0.5pt]

4. On pose $v_n = \ln(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Exprimer $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n. [0.75pt]
   (b) En déduire le produit $s'_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$ et étudier la limite de (s'_n). [1pt]

Exercice 14 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $[0; +\infty[$, puis étudier le signe de sa fonction dérivée et dresser le tableau de ses variations.

2. On définit la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$ par son terme général : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.
   (a) Justifier que si $n \leq x \leq n+1$, alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
   (b) Montrer, sans chercher à calculer u_n, que pour tout entier naturel n : $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F, la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $F(x) = (\ln(x+3))^2$.
   (a) Justifier la dérivabilité sur $[0; +\infty[$ de la fonction F et déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.
   (b) On pose, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^n f(x)dx$. Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. Calculer S_n. La suite (S_n) est-elle convergente ?

Exercice 15 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

2. On définit la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n \geq 1$.
   (a) Vérifier que z_1 est solution de (E).

(b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

(c) Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 dans le plan complexe.

3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i(-1)^n}{2}\right)$.

4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

5. On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.
   On note $l_n = M_1M_2 + M_2M_3 + ... + M_nM_{n+1}$.

   (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $l_n = 2\sqrt{3}(2^n - 1)$.

   (b) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $l_n \geq 1000$.

Exercice 16 :

On définit, pour tout entier naturel n, la suite de nombres complexes (z_n) par : $\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$.

On note r_n le module du nombre complexe z_n.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. (a) Calculer z_1, z_2 et z_3.

   (b) Placer les points A_1 et A_2 dans le plan complexe.

   (c) Écrire le nombre comlexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

   (d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est rectangle isocèle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente ? Interpréter géométriquement le résultat précédent.

3. On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3,etc. Ainsi, $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1}$.

   (a) Démontrer que pour tout entier n, $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

   (b) Donner une expression de L_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

Problème 1 :

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

On appelle $(\mathcal{C})$, la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, unité 2cm sur chaque axe.

1. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et interpréter graphiquement les résultats.

   (b) Étudier le sens de variations de f et dresser son tableau de variations.

   (c) Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

2. En utilisant les variations de f' sur $[0; 1]$, montrer que pour tout $x \in [0; 1]$, on a : $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

3. Soit $g(x) = f(x) - x$ sur $[0; 1]$.

   (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.

   (b) Vérifier que : $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{e}{3}$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

4. (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{e}{3}$.

   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|.$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

(d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Problème 2 :
Le problème comporte deux parties A et B dépendantes.
Partie A :
On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2\ln x$.

1. Étudier le sens de variations de g et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $]0;+\infty[$, deux solutions dont l'une est 1 et l'autre, $\alpha > 1$. Justifier l'encadrement : $3 \leq \alpha \leq 4$.
3. Déduire des questions précédentes, le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
4. Montrer que : $\sqrt{1+8\ln\alpha} = \alpha$.

Partie B :
On considère la fonction f définie sur $[3;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1+8\ln x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [3;+\infty[$, $f(x) \geq 3$ et que $0 \leq f'(x) \leq \frac{4}{9}$.

On considère la suite (u_n) d'éléments de $[0\,;3]$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{9}|u_n - \alpha|.$$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$
5. En déduire que la suite la (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Fiches de Travaux Dirigés De Mathématiques.

Fiches de Travaux Dirigés de Tle C

Grands Profs Maths

Coniques

Objectifs Pédagogiques Opérationnels:

Proposé Par: **Andy William DONGMO MIMKEMG.**

Année Scolaire 2019/2020

Exercice* : 1 (Préliminaire)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. La Parabole de foyer $F(1,0)$ et de directrice $(D) : x = -1$ a pour équation :

(a) $y^2 = 4x$; (b) $y^2 = 2x$; (c) $x^2 = 4y$.

2. L'ensemble des point $M(x; y)$ tels que $4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 - 1 = 0$ est une ellipse de centre :

(a) $I(1; -1)$; (b) $O(0; 0)$; (c) $J(-1; 1)$.

3. Soit m un nombre réel. L'ensemble des points $M(x; y)$ tel que : $m^2x^2 + |m|y^2 + 1 = 0$ est :

(a) Un cercle (b) Ensemble vide ; (c) Une ellipse.

4. La courbe d'équation $|x^2 - y^2| = 1$ est :

(a) Une hyperbole ; (b) Une réunion de d'une hyperbole et d'une ellipse ; (c) Une réunion de deux hyperboles.

5. L'hyperbole $\frac{(x-2)}{16} - \frac{(y+2)}{9} = 1$ a pour excentricité :

(a) $\frac{5}{4}$; (b) $\frac{5}{3}$; (c) $\frac{4}{3}$.

Exercice* : 2

Répondre par **Vrai** ou **Faux** en justifiant ta réponse :

1. La courbe d'équation $x = \frac{1}{2}y^2$ est une parabole de sommet O, de foyer $F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ et de directrice $(D) : x = -\frac{1}{4}$.
2. La parabole $y = 4x^2$ se déduit de la parabole $x = 4y^2$ par symétrie par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$.
3. La courbe d'équation $x^2 - y^2 = -5$ est une hyperbole de centre O et de sommets $S(0; \sqrt{5})$ et $S'(0; -\sqrt{5})$.
4. Les asymptotes de l'hyperbole $4(x+2)^2 - 9(y-1)^2 - 36 = 0$ sont les droites d'équations respectives : $y = \frac{2}{3}x$ et $y = -\frac{2}{3}x$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
5. L'ellipse d'équation $4x^2 + 9y^2 = 36$ a pour excentricité $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice* :3

Dans le repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, on considère la conique (H) d'équation $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

1. (a) Quelle est la nature (H), quel est son centre ?
   (b) Déterminer ses sommets. On appelle A le sommet d'abscisse positive.
   (c) Montrer que le point $F(5; 0)$ est le foyer de (H). Détermine l'autre.
   (d) Déterminer les équations des asymptotes à (H). On appellera (Δ) l'asymptote de coefficient directeur positif.

(e) Tracer (H).

2. Soit $E\left(\frac{16}{5};\frac{12}{5}\right)$
   (a) Soit (D) la droite d'équation $x=\frac{16}{3}$. Montrer que $(\Delta)\cap(D)=\{E\}$.
   (b) Montrer quue $||\overrightarrow{OA}||=||OE||$.
   (c) Montrer que le triangle OEF est rectangle en E.

Exercice*′ : 4

Un plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j})$ d'axes $x'ox$ et $y'oy$.

1. Soit (C) le cercle d'équation $x^2+y^2=1$.

   A tout point $M(x;y)$ de ce cercle on associe le point $N(X;Y)$ et tel que : $\begin{cases} X=x, \\ Y=\frac{1}{2}y. \end{cases}$

   Montrer que N appartient à une courbe (E) dont on donnera une équation et les éléments de symétrie.

2. A tout point $M(x;y)$ du cercle (C), d'ordonné non nulle, on associe maintenant le point $P(X;Y)$ tel que $\begin{cases} X=\frac{1}{y}, \\ Y=\sqrt{3}\frac{x}{y}. \end{cases}$

   Monter que P appartient à une courbe H dont on donnera une équation, les éléments de symétrie et les équations des asymptotes.

Exercice* : 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. On désigne par γ l'application du plan dans lui même qui, à un point M d'affixe z ; associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(z-1)$.

1. Démontrer que γ est une rotation dont on précisera l'angle et le centre.
2. A tout complexe z différent de 3, on associe le nombre complexe $Z=\dfrac{z^2}{\bar{z}-3}$, où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z. On note H l'ensemble des points M du plan d'affixe z, telle que Z soit un nombre réel.
   (a) Démontrer que H est soit une droite, soit une hyperbole H' dont ton donnera le centre W, les foyers, les directrices et l'excentricité.
   (b) Tracer H' dans le repère orthonormé $(W;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.
3. Démontrer que l'image de H' par γ est une conique, préciser sa nature, son centre et son excentricité.

Exercice* :6

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E):\sin^2(\alpha)z^2-4\sin(\alpha)z+(4+\cos^2(\alpha))=0$, $\alpha\in]0;\pi[$.
2. Soient M et N les images des solutions de (E) dans le plan affine
   (a) Montrer que lorsque α d'écrit $]0;\pi[$, l'ensemble des points M et N est une partie de la conique (C) : $x^2=4y^2+4$.
   (b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de (C).
   (c) Donner l'équation complexe de (C).
   (d) Dessiner (C).

Exercice ** : 7**

A tout réel m, élément de $I =]0;1[$, on associe dans le plan affine euclidienne, rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$, la conique (E_m) d'équation $y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}$.

(a) Construire la courbe $(E_{\frac{3}{4}})$.

(b) Quelle est la nature de (E_m) ? Déterminer par leurs coordonnées dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ le centre et les sommets de (E_m). Déterminer et tracer (S) constituant l'ensemble des sommets du grand axe de (E_m) quand m varie dans I.

(c) Déterminer par leurs coordonnées dans le repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ les foyers de (E_m). Déterminer et tracer la courbe (F) constituant l'ensemble de ces foyers quand m d'écrit I.

GPM Évaluations Sommatives Cluster TC

L'épreuve comporte deux exercices et un problème étalés sur deux pages.

EXERCICE 1 : 5points

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath},\vec{k})$ d'unité 1cm sur les axes.

1) On considère les points $A(0;1;-2)$; $B(-2;1;0)$; $C(-1;0;-2)$ et $D(2;-1;1)$.
   a- Justifier que les points A; B et C forment un plan (ABC) dont on déterminera une équation cartésienne. **0,25pt+0,5pt=0,75pt**
   b- Montrer que les points A ; B ; C et D ne sont pas coplanaires. **0,25pt**
   c- Calculer le volume du tétraèdre ABCD. **0,5pt**
2) Déterminer l'expression analytique de la réflexion d'axe $(T) : x - y + z + 3 = 0$. **0,75pt**
3) L'expression analytique d'une application f de l'espace est $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(x + 2y - 2z - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x + y + 2z + 6) \\ z' = \frac{1}{3}(-2x + 2y + z - 6) \end{cases}$.
   a- Déterminer l'ensemble (P) des points invariants par f. **0,5pt**
   b- Démontrer que pour tout point M de l'espace, si M'= f (M), alors le milieu H du segment $[MM']$ appartient à (P) et que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe orthogonale à (P). **1,25pt**
   c- Déduire la nature et l'élément caractéristique de f. **0,25ptX2=0,5pt**
   d- Vérifier que f est une involution $(f \circ f = id)$. **0,5pt**

EXERCICE 2 : 5points

1) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère S la similitude directe de centre $A(1-i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ puis $(E): 5x^2 + 5y^2 - 24x - 24y + 6xy + 20 = 0$.
   a- Déterminer l'expression analytique de S. **0,5pt**
   b- Déduire l'équation de (E'), image de (E) par S puis la nature et les éléments caractéristiques de (E'). **0,5pt+0,25pt+0,5pt=1,25pt**
   c- Déduire la nature et les éléments caractéristiques de (E) et le construire. **0,25pt+0,5ptX2=1,25pt**
2) n désigne un entier naturel supérieur à 1. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$, toutes indiscernables au toucher. Un joueur tire successivement et sans remise 2 boules de cette urne. Un joueur mise 800FCFA pour jouer à ce jeu. Si les boules tirées portent des numéros pairs, on lui donne 1600 FCFA. Si les boules tirées sont de parités différentes, on lui donne 1200 FCFA et on ne lui donne rien si elles portent des numéros impairs. On désigne par X le gain algébrique du joueur à l'issue de chaque épreuve.

a- Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de n. **1,25pt**

b- Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de n et conclure. **0,5pt**

c- Quelle doit être la composition de l'urne pour que l'espérance de gain du joueur soit de 240FCFA ? **0,25pt**

<u>PROBLEME</u> :10points

<u>PARTIE A</u> : 2,5points

On considère les équations différentielles $(E): y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ et $(E'): y'' + 2y' + y = 0$.

1) Résoudre (E'). **0,5pt**
2) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = x^2e^{-x}$ est une solution particulière de (E). **0,5pt**
3) Soit h une fonction deux fois dérivable sur IR .
   a- Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de (E'). **0,5pt**
   b- Déterminer la solution h de (E) qui admet en $K(0; 4)$ une tangente parallèle à (OI). **1pt**

<u>PARTIE B</u> : 3,5points

On désigne par f la fonction définie par $f(x) = (x + 2)^2\ e^{-x}$.

1) Étudier les variations de f et la tracer avec soin sur un repère orthonormé (O ;I ;J) d'unité 1cm sur les axes. **1,5pt**
2) En remarquant que f est une solution de (E), déterminer une primitive de f. **0,5pt**
3) On pose $I_n = \int_0^n (x + 2)^2e^{-x}dx$ pour tout entier naturel n.
   a- Exprimer I_n en fonction de n. **0,5pt**
   b- Étudier la convergence de la suite (I_n) et déduire l'aire du domaine D avec

$D = \{\ M(x;\ y)\ |\ \ x \geq 0;\ \ 0 \leq y \leq f(x)\ \}$. **O,5ptX2=1pt**

<u>PARTIE C</u> : 4points

On considère la suite (u_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k + 2n)^2e^{-\frac{k}{n}}$.

1) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ et que $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) + \frac{9-4e}{ne}$. **1pt**
2) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N} / \ k < n$, on a : $\frac{1}{n}f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\ dx \leq \frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$. **1pt**
3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,on a : $u_n \leq \int_0^1 f(x)\ dx \leq u_n + \frac{4e-9}{ne}$. **1pt**
4) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_1 + \frac{9-4e}{ne} \leq u_n \leq I_1$ et étudier la convergence de la suite (u_n).

0,5ptX2 = 1pt

Ministère des enseignements secondaires
Office du baccalauréat du Cameroun
GPM

Examen : Baccalauréat Blanc
Session : 2020
Série : C/E
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures coefficient : 5(C)/4(E)

Exercice 1 : 3,5pts

On jette deux fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Soit a et b les numéros apparus sur la face supérieure du dé au premier et au second dans cet ordre. On pose : $a \wedge b = \delta$ et $a \vee b = \mu$, où δ est le PGCD et μ le PPCM des entiers a et b.

1. Déterminer les entiers naturels non nuls a et b tels que : $\delta + \mu = 12$. 0,5pt
2. Déterminer la probabilité pour que δ divise 8. 0,5pt
3. Déterminer la probabilité pour que $\delta + \mu = 12$. 0,25pt
4. Soit X la variable aléatoire qui à chaque couple (a, b) associe δ.
   a. Déterminer les valeurs prises par X et la loi de probabilité de X. 1 pt
   b. Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de X. 0,75pt
   c. Définir la fonction de répartition de X. 0,5 pt

Exercice 2 : 3pts

Soit M un point d'affixe z

1.a) Démontrer que l'ensemble des points M tels que $z - i\bar{z} = 0$ est une droite (D). *0,5pt*

b) Démontrer que pour tout point M, la distance de M à la droite (D) est $\frac{1}{2}|z - i\bar{z}|$. *0,5pt*

2. Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\frac{|z+1+i|}{|z-i\bar{z}|} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ est une ellipse dont on précisera le foyer, la directrice et l'excentricité. *1pt*

3. On pose C_m l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $\frac{|z+1+i|}{|z-i\bar{z}|} = m$. Déterminer suivant les valeurs de m la nature et les éléments caractéristiques de C_m. *1pt*

Exercice 3 : 2,5pts

L'espace (E) est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soient (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

1. Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants selon une droite (D) dont on déterminera le système d'équations paramétriques. *0,75pt*
2. Ecrire l'expression analytique de la réflexion S_{P_1} de plan (P_1). *0,5pt*
3. Ecrire l'expression analytique de la réflexion S_{P_2} de plan (P_2). *0,5pt*
4. En déduire l'expression analytique et la nature de $S = S_{P_1} \circ S_{P_2}$. *0,75pt*

Problème : 11 pts Les parties A , B et C sont indépendantes

Partie A : 3, 5 pts

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 5\ cm$. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et (C) sa courbe représentative .

1. Etudier les variations et tracer la courbe (C). 1 pt
2. Déterminer les restrictions de f qui admettent une bijection réciproque puis dresser leur tableau de variation 0,5 pt

3. Soit la fonction F définie IR par $F\ (x) = ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Calculer la dérivée de F et en déduire que F est une primitive de f sur IR qui s'annule en 0. 0,5 pt
4. Montrer que F est impaire, puis calculer la limite de F en $+\infty$ *et en* $-\infty$. 1pt
5. Soit λ un réel strictement positif. On note A(λ) l'aire en cm^2 du domaine constitué des points M(x ;y) tels que $\lambda \leq x \leq 2\lambda$ et $0 \leq y \leq f(x)$.Exprimer A(λ) en fonction de λ et déterminer la limite de A(λ) en $+\infty$. 0,5 pt

<u>Partie B</u> : 1,5pt

1- Une population de poissons d'une certaine espèce croit au cours des ans selon la loi :
$g' = \frac{g}{5}$ $(E1)$ où g désigne la quantité de poissons (exprimée en milliers) dépendant du temps t (exprimé en année).

a) Résoudre l'équation différentielle (E1). 0,25pt

b) Sachant qu'à la date t=0 la population comprend un millier de poissons. Trouver l'expression de g(t). 0,25pt

2- En réalité un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons. La population suit la loi $g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15}$ $(E2)$.

On pose $h = \frac{g}{3-g}$ $(\ on\ suppose\ que\ g(t) \neq 3\ )$.

a) Montrer que : g est solution de $E2$ équivalent à h est solution de $E1$. 0,5pt

b) En déduire toutes les solutions $g\ de\ (E2)$ et trouver celle qui vérifie $g(o) = 1$. 0,5pt

<u>Partie C</u> : 6pts

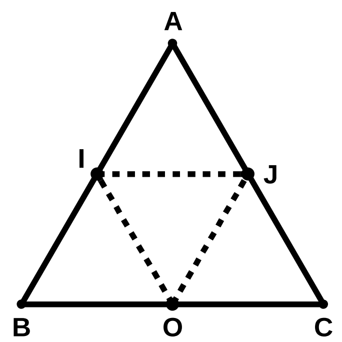
Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct de côté de longueur 2 cm. O, I et J sont respectivement les milieux des segments$[BC]$; $[AB]$ $et[AC]$. On considère les applications affines f, g , h, φ et ψ tels que :

*.$f(A) = C, f(B) = B\ et\ f(C) = A$

*$g = t_{\overrightarrow{BA}} \circ f\ et\ h = S_{(IJ)} \circ S_{(BC)}$

* $\varphi(A) = B, \varphi(B) = B\ et\ \varphi(C) = C$

* $\psi(A) = D, \psi(B) = B\ et\ \psi(C) = C$ où D est le symétrique de B par rapport à A.



1. Déterminer la nature exacte du quadrilatère BIJO et déterminer $f(I)\ , f(O)\ et\ f(J)$. 1pt
2. Donner la nature et les éléments caractéristiques de f et φ. On pourra déterminer $\varphi \circ \varphi$. 1pt
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques*de g et h*. 0,75pt
4. Montrer que la droite (BA) est globalement invariante par ψ et la droite (BC) est invariante point par point par ψ. 0,5pt
5. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de ψ. 0,25pt
6. On considère le repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ *avec* $\vec{\imath} = \overrightarrow{OC}$ *et* $\vec{\jmath} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{OA}$.
   a. Déterminer les coordonnées des points A,B,C et D dans ce repère. 0,5pt
   b. Définir analytiquement ψ et φ. 1pt
7. Déterminer l'expression analytique de g ; puis son écriture complexe dans le plan complexe.

Ministère des Enseignements Secondaires — Année scolaire 2019-2020
Département de mathématiques — Durée : 4h, Coefficient :5
CLASSE : TleC — GPM

Épreuve De Mathématiques

Exercice 1 : 2,75 points

On se propose de résoudre l'équation différentielle suivante : $y''(x) + y(-x) = x + \cos x$ (E).

1. On considère les équations $y''(x) + y(x) = \cos x$ (E_1) et $y''(x) - y(x) = x$ (E_2).
   (a) Résoudre les équations $y''(x) + y(x) = 0$ et $y''(x) - y(x) = 0$. **0,5 pt**
   (b) Montrer que $y(x) = \frac{x}{2}\sin x$ est une solution particulière de (E_1) et que $y(x) = -x$ est une solution particulière de (E_2). **0,5 pt**
   (c) En déduire les solutions générales de (E_1) et (E_2). **0,5 pt**
2. On admettra que toute fonction f se décompose de manière unique comme somme de deux fonctions $f = g + h$ telles que g soit paire et h impaire.
   (a) Montrer que $f = g + h$ est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E_1) et h est solution de (E_2) .Déduire alors les solutions de (E). **1,25 pt**

Exercice 2 : 3 points

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. On prendra pour unité graphique $4cm$. Soient les points $A,\ B,\ C$ et D d'affixes respectives $a,\ b,\ c$ et d telles que : $a = i,\ b = 1 + 2i,\ c = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $d = 3 + 2i$. On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' image de z par s.

1. Exprimer z' en fonction de z et déterminer les éléments caractéristiques de s. **0,75 pt**
2. Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2U_n + 1$
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.**0,25 pt**
   (b) Interpréter géométriquement (utiliser la similitude s) termes de la suite U_n.**0,25 pt**
   (c) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2^n - 1$. **0,25 pt**
   (d) Montrer $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geq p$, $U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$. **0,5 pt**
   (e) Déduire : $PGCD(U_n; U_p) = PGCD(U_p; U_{n-p})$ et $PGCD(U_n; U_p) = U_{PGCD(n;p)}$ **1 pt**

Exercice 3 : 5,75 points

(I) $ABCD$ est un carré de sens direct de centre I, (Γ) le cercle passant par $A,\ B;\ C$ et D.

1. Faire une figure. **0,25 pt**
2. On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$, r_D la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$, r_1 la rotation de centre A et d'angle -$\frac{\pi}{4}$ et r_2 la rotation de centre A et d'angle $\frac{3\pi}{4}$. On pose $f = t \circ r_D,\ g_1 = r_1 \circ f,\ g_2 = r_2 \circ f$.
   (a) Démontrer que $f,\ g_1$ et g_2 sont des rotations dont on précisera les angles.**0,5 pt**
   (b) Déterminer $f(D)$, $f(A)$. Quel est le centre de f ? trouver $g_1(D)$ et $g_2(D)$. **1 pt**
   (c) Soit $A'_1 = g_1(A)$ et $A'_2 = g_2(A)$. Montrer en utilisant $g_2 \circ g_1^{-1}$ que A est le milieu du segment $[A'_1A'_2]$. **0,25pt**
   (d) Montrer en déterminant Mes $(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AA_1}})$ que A'_1 sur la tangente en A (Γ).**0,5pt**
   (e) Soit J le centre de g_1 et K celui de g_2. Démontrer que J et K appartiennent à (Γ) et sont diamétralement opposés. Placer J et K sur la figure. **0,75pt**

(B) Une fourmi se déplace sur les arêtes d'une pyramide $ABCDS$ (de sommet principal S). Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il ya équiprobabilité) vers un sommet voisin; on dit qu'elle fait ≪ un pas ≫. On suppose que la fourmi se trouve en A.

1. Après avoir fait deux pas, quelle est probabilité qu'elle soit : en A, B, C et en D.**1pt**
2. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note par S_n l'événement : "la fourmi est au sommet S après n pas" et p_n la probabilité de cet événement.
   (a) Calculer p_1. **0,25pt**
   (b) En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \overline{S_n}$, montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$. **0,5pt**
3. On considère la suite (p_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}^*$ n par : $p_1 = \frac{1}{3}$ et $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$
   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $p_n = \frac{1}{4}(1 - (-\frac{1}{3})^n)$. **0,5pt**
   (b) Déterminer $\lim p_n$ quand n tend vers $+\infty$ et conclure. **0,25pt**

Problème : 08,5 points

Partie A : Soient les fonctions f et h définies par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$ et $h(x) = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f admet deux asymptotes (donner les équations de ses asymptotes). **0,75pt**
2. Déterminer la dérivée de f et dresser son tableau de variation. **0,5pt**
3. Déterminer les coordonnées de A point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes. **0,25pt**
4. On pose $g(x) = 1 - x + 2\ln x$ avec $x > 0$.
   (a) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation. **0,75pt**
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique dans chacun des intervalles suivant $]0; 2[$ et $]2; 4[$. **0,75pt**
   (c) Donner un encadrement de la solution α appartenant à $]2; 4[$ d'amplitude 10^{-1} et montrer que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$. **0,5pt**
5. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$. En déduire que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_h)$ se coupent en deux points. **0,25pt**
6. Montrer que pour tout $x \geq 4$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_h)$ dans le repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j}$. **1pt**

Partie B :

1. Soit D_f l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $1 \leq x \leq \alpha$, $0 \leq y \leq f(x)$.
   (a) Calculer en unités d'aire et en utilisant une intégration par partie, l'aire $A(\alpha)$ du domaine D_f. **0,75pt**
   (b) Montrer que $A(\alpha) = 2 - \frac{2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $A(\alpha)$ à 10^{-1}. **0,5pt**
   (c) On fait tourner le domaine D_f autour de l'axe des abscisses. A l'aide de deux intégrations par parties, calculer en unités de volume, le volume du solide de révolution obtenue. **1pt**
2. Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel non nul n par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a $0 \leq I_n \leq \ln(\frac{n+1}{n})$. En déduire que I_n converge et préciser sa limite. **0,75pt**
   (b) On pose $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$. Calculer S_n fonction de n , déduire sa limite.**0,75pt**