

## Calcul de limites

**Sujet 1 \*** : Limites de fonctions trigonométriques

Dans chacun des cas suivants , calculer la limite de la fonction  $f$  en 0.

a)  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

b)  $f(x) = \frac{\sin^3 x}{x^2}$

c)  $f(x) = \frac{\tan^2 x}{x}$

d)  $f(x) = \frac{x^3 \cos^3 x}{\sin^2 x}$

e)  $f(x) = \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{2 \tan x}$

**Sujet 2 \*** : Limites de fonctions trigonométriques

Dans chacun des cas suivants , calculer la limite de la fonction  $f$  en 0.

a)  $f(x) = \frac{\sin x + \tan x}{\sqrt{x^2}}$

b)  $f(x) = \frac{\sin x - \tan x}{\sqrt{x^2}}$

c)  $f(x) = \frac{1 + \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$

d)  $f(x) = \frac{\sin x}{\tan x}$

**Sujet 3 \*** : Limites de fonctions trigonométriques**Partie A :**

1. Démontrer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

2. En déduire les limites suivantes.

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - \cos x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x \tan x}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x}$

**Partie B :** En utilisant les propriétés de comparaison pour calculer les limites suivantes.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1}$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{3 + \cos x}$
5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \cos x}{3 + \cos x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sin x}$

**Sujet 4 \*\*** : Limites de fonctions trigonométriques et irrationnelles

Les parties A et B sont indépendantes.

Calculer les limites suivantes quand elles existent :

**Partie A :**

- a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\cos 2x}$
- b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos^2 x}{\sin x + \cos^2 x - 1}$
- c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$
- e)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{2x - \frac{\pi}{2}}$

**Partie B :**

1. Démontrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$
2. En déduire les limites suivantes :
  - a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x}$
  - b.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2x^2}$
  - c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{\sin 2x}$
  - d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x}$

**Sujet 5 \*** : Limites de fonctions irrationnelles

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[1 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$  et

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} .$$

1. Montrer que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$

2. En déduire les limites des fonctions  $f$  et  $g$  en  $+\infty$ .

**Sujet 6\*** : Utilisation du théorème des gendarmes.

1. Démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x + \sin x| \leq 2$

2. En déduire les limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction  $x \mapsto \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$

**Sujet 7\*** : Limites de fonctions irrationnelles.

Dans chacun des cas suivantes, calculer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

a)  $f(x) = x + \sqrt{1-x}$

b)  $f(x) = \frac{x+1}{2} + \sqrt{x^2 - x + 1}$

c)  $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 3}$

d)  $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$

e)  $f(x) = 2x + \sqrt{1-x}$

**Sujet 8\*** : Limites de fonctions irrationnelles.

Dans chacun des cas suivantes, calculer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

a)  $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 1}$

b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$

c)  $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4}$

d)  $f(x) = \frac{x - \sqrt{|x|}}{3x + 2}$

e)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x+2|}} - \frac{x}{\sqrt{|x+1|}}$

**Sujet 9\*** : Limite d'une fonction quotient

1. On considère la fonction la fonction  $f$  sur  $[2; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{3x + \sin x}{x-1}$ .

2. Montrer que, pour tout  $x \geq 2$  ;  $|f(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$ . En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

**Sujet 10\*** : Limite d'une fonction quotient

On considère la fonction la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$ .

1. Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$ .

2. En déduire les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(2 - \cos x)}$  ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{2 - \cos x}$  ;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2(2 - \cos x)} .$$

**Sujet 11\*** : Limite d'une fonction par comparaison.

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{E(x)}{x}$ , où E est la fonction partie entière.

Encadrer  $f$  par deux fonctions rationnelles.

En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

**Sujet 12\*\*** : Vrai ou Faux

Répondre par vrai ou Faux .Justifier votre réponse.

1. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ ; et si, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) > g(x)$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = +\infty$ .
2. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  et si  $g(x) < 0$  pour tout réel  $x$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = -\infty$ .
3. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , alors soit  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ , soit  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ .

**Branches infinies.****Sujet 13\*\***: Étude des branches infinies de fonctions quotient

Étudier les branches infinies des courbes représentation des fonctions suivantes.

a)  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)^2}$

b)  $g(x) = \sqrt{(x-2)^2} - \frac{3}{x-1}$

c)  $h(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x}$

d)  $i(x) = x \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2$

e)  $j(x) = x \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

f)  $k(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

**Sujet 14\*\***: Asymptote oblique

Soit a et b deux nombres réels,  $f$  la fonction définie sur :  $f(x) = ax + b - \sqrt{x^2 + 1}$ .

1. Étudier la limite de  $f$  en  $-\infty$ . (On discutera suivant les valeurs de a.)
2. Déterminer a et b pour que la droite d'équation  $2x - y + 2 = 0$  soit une asymptote à la courbe représentative de  $f$  en  $-\infty$ .

## Fonctions continues sur un intervalle.

### Sujet 15\* : Étude de la continuité en un point.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x + 2 \sin x$ .

1. a. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$   
b. En déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a. Montrer que  $g$  est continue en 0.

b. Montrer que pour tout  $x \in \left] \frac{2}{3} ; +\infty \right[ : \frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c. En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ . Interpréter géométriquement le résultat.

### Sujet 16\* : Image d'un intervalle par une fonction continue.

Déterminer  $f(K)$  dans chacun des cas suivants :

- a)  $f(x) = x^2 + x - 2$ ,  $K = [-2; 3]$
- b)  $f(x) = \frac{x-2}{x^2}$ ;  $K = ]0; +\infty[$
- c)  $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$   $K = \mathbb{R}$
- d)  $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2$ ;  $K = [-1; 3]$
- e)  $f(x) = \frac{-x+1}{2x+1}$ ;  $K = [-1; +\infty[$
- f)  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1}$ ;  $K = [-1; 1]$

### Sujet 17\* : Prolongement par continuité d'une fonction .

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}{x - 1}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Calculer la limite en 1 de la fonction  $f$ .
3. En déduire une fonction  $g$ , prolongement par continuité de la fonction  $f$  en 1.

### Sujet 18\*\* : Théorème de valeurs intermédiaires.

1. Soit  $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$  une fonction continue. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[0; 1]$ .
2. **Plus générale :** soit  $f : [a; b] \rightarrow J \subset [a; b]$  une fonction continue. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution sur  $[a; b]$ .

**Sujet 19\*\* : Étude de la continuité sur un intervalle.**

Déterminer dans chacun cas les nombres réels a et b pour que  $f$  soit une fonction continue sur l'intervalle  $[-1; 1]$  :

$$\text{a) } \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2+2x+3}} \text{ si } x \in ]-1; 1[ \\ f(-1) = a \\ f(1) = b \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} + \frac{1}{4x^2+3} \text{ si } x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]-\frac{1}{2}; 0\right[ \cup ]0; 1] \\ f(0) = a \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = b \end{cases}$$

**Sujet 20\*\* : Image d'un intervalle par une fonction continue.**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{x-1} - 2$ .

- Étudier la continuité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .
- Justifier que :  $\forall x \in [1; +\infty[, f(x) \geq -2$ .
- Démontrer que pour tout élément  $\beta$  de  $[-2; +\infty[$  a un antécédent  $\alpha$  dans  $[1; +\infty[$  ; en déduire l'image par  $f$  de l'intervalle  $[1; +\infty[$ .

**Sujet 21\*\* : Étude de la Continuité d'une fonction comportant la fonction partie entière.**

Étudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto E(x) + [x - E(x)]^2$ ,  $E$  est la fonction partie entière.

**Sujet 22\*\* : Étude de la Continuité d'une fonction 1-lipschitzienne.**

Soit  $f$  une fonction telle que pour tout nombres réels a et b :  $|f(a) - f(b)| \leq |b - a|$ .

Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Sujet 23\*\* : Valeur approchée des solutions d'une équation.**

- Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation (E) admet une solution unique dans l'intervalle  $K$  :

a) (E) :  $x^4 - 3x = 1$  ;  $K = ]1; 2[$

b) (E) :  $\cos x = x$  ;  $K = \mathbb{R}$

c) (E) :  $\frac{x^3 - 3x - 1}{x - 1} = m$  ( $m \in \mathbb{R}$ ) ;  $K = ]1; +\infty[$ .

- Démontrer que l'équation  $\frac{1}{4}x^3 - x^2 + 1 = 0$  a trois solutions réelles.

Déterminer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de chacune de ces solutions.

**Fonctions continues strictement monotones**

**Sujet 24\*\*** : **Bijection entre deux ensembles**

$f$  est l'application de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = x^2 + \sqrt{x^2 + 1}$ .

Donner deux ensembles  $A$  et  $B$  tels que  $f$  détermine une application bijective de  $A$  vers  $B$ .

**Sujet 25\*\*** : **Réciproque d'une bijection continue strictement monotone.**

On considère la fonction :

$$f : ] - 1 ; + \infty[ \rightarrow ] - 4 ; + \infty[$$

$$x \mapsto x^2 + 2x - 3$$

1. Justifier que  $f$  est une bijection.
2. Déterminer la bijection réciproque de  $f$ .
3. Établir le tableau de variation de  $f^{-1}$ .
4. Construire la représentation graphique de  $f$ , en déduire celle de  $f^{-1}$ .

**Sujet 26\*\*** : **Réciproque d'une bijection continue strictement monotone.**

Le repère  $(O ; I ; J)$  est orthonormé. Soit  $f$  la fonction continue de  $[0 ; \pi]$  vers  $[0 ; 2]$  définie par :  $f(x) = 1 + \cos x$ .

1. Démontrer que  $f$  admet une bijection réciproque  $f^{-1}$  et préciser son sens de variation.
2. Tracer les courbes représentatives de  $f$  et  $f^{-1}$ .

**Sujet 27\*\*** : **Réciproque d'une bijection continue strictement monotone.**

Le repère  $(O ; I ; J)$  est orthonormé.

1. Démontrer que la fonction  $f : x \mapsto \frac{x}{\sin x}$  réalise une bijection de  $]0 ; \pi[$  vers un intervalle  $J$  que l'on précisera.
2. Tracer les courbes représentatives de  $f$  et  $f^{-1}$ .

**Sujet 28\*\*** : **Fonction continue strictement monotone.**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$  ; où  $a$  ;  $b$  et  $c$  sont des nombres réels.

1. Calculer  $f'(x)$
2. Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sachant que  $f$  admet 1 pour extremum en  $x = 0$  et -3 pour extremum pour  $x = 2$ .
3. Étudier les variations de la fonction  $f$ . Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $[-1 ; 0]$  ; une solution unique solution  $\beta$  dans  $[0 ; 1]$  ; une solution unique  $\lambda$  dans  $[2 ; 3]$ .
4. Tracer la courbe  $C_f$  de  $f$ .

**Sujet 29\*\*** : **Fonction continue strictement monotone.**

Soit  $f$  la fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	↗ -1	↘ -5	↗ $+\infty$

La fonction  $f$  a pour formule explicite :  $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
2. Calculer  $f'(x)$ .
3. Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à  $[0 ; +\infty[$  est une bijection de  $[0 ; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
4. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in ]1 ; 2[$ . Donner une encadrement de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près. (On précisera la méthode utilisée)
5. Donner une équation de la tangente  $(T_0)$  à la courbe  $(C_f)$  de  $f$  au point d'abscisse  $x_0 = 1$ .

**Sujet 30\*\* : Fonction continue strictement monotone.**

Soit  $a, b$  et  $c$  trois nombre réels et  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x}$ .

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans une repère orthonormé  $(O ; I ; J)$ .

1. Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  pour que  $(C)$  passe par les points  $A(1 ; 8) ; B(-4 ; -2)$  et admette au point  $E$  d'abscisse  $-2$  une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. On considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x}$ .
  - a. Déterminer l'ensemble de définition de  $D_g$  de  $g$ .
  - b. Déterminer les limites de  $g$  aux bornes de son ensemble de définition.
  - c. Étudier les variations de  $g$  puis donner son tableau de variations complet.
3. Étudier les branches infinies de la courbe représentative de la fonction  $g$ .
4. Montrer que le point  $I(0 ; 3)$  est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction  $g$ .
5. Construire la courbe représentative de la fonction  $g$  ainsi que les asymptotes et le point  $I$ .
6. Discuter graphiquement suivant le paramètre  $m$ , le nombre de solution de l'équation :  $x^2 + (3 - m)x + 4 = 0$ .

**Sujet 31\*\* : Fonction rationnelle -Inégalité des accroissements finies .**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ . On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans une repère orthonormé  $(O ; I ; J)$ .

1. Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tel que pour tout  $x \neq -1$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$ .
2. Montrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - 1$  est une asymptote à la courbe  $(C_f)$ .
3. Étudier les variations de  $f$ .
4. Étudier les positions relatives de la courbe  $(C_f)$  par rapport à  $(\Delta)$ .
5. Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à l'intervalle  $] -\infty ; -3]$  est une bijection de  $] -\infty ; -3]$  sur une intervalle  $J$  que l'on précisera.
6. Calculer  $g(-5) ; g(-4) ; (g^{-1})'(-7)$ .
7. Tracer la courbe  $(C_f)$  ainsi que  $(C_g)$  courbe de  $g^{-1}$  dans le même repère.
8. Démontrer que pour tout  $x \in [1 ; 3]$  on a :  $|f'(x)| \leq \frac{3}{4}$ . En déduire que

$$|f(x) - 3| \leq \frac{3}{4}|x - 3| \text{ pour tout } x \in [1 ; 3] .$$

9. Résoudre et discuter graphiquement suivant les valeurs de  $m$  le nombre de solutions de l'équation  $x^2 - mx + 3 - m = 0$ .

**Sujet 32\*\*** : Famille de fonctions

Soit la famille de fonction  $f_m$  définie par :  $f_m(x) = \frac{mx^2 - 2x + 1}{x^2 - 2mx + 1}$ , où  $m$  est paramètre réel. On note par  $(C_m)$  les courbes représentative de la famille de fonction  $f_m$  dans un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$ .

1. Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  de  $f_m$  passent par deux points fixes A et B que l'on déterminera les coordonnées.
2. Déterminer le réel  $m$  pour que quelque soit le réel  $x$  tel que  $x \neq 0 ; x \neq 2$  et  $x \neq -2$ , l'entier naturel  $[f_m(x)]^2$  soit au plus égal à 1.
3. Étudier la fonction  $f_0$  puis représenter graphiquement sa  $(C_0)$ .

**Sujet 33\*\*** : Réciproque d'une bijection continue et strictement monotone.

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ . On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans une repère orthonormé  $(O ; I ; J)$ .

1. Étudier la fonction  $f$ . Montrer que la courbe  $(C)$  de  $f$  admet un point d'inflexion dont on précisera.
2. Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point  $x_0 = 0$ .
3. Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une solution  $\alpha \in [1 ; 2]$ .
4. Montrer que  $f$  est bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
5. Tracer la courbe  $(C)$ .
6. Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivé de la bijection réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  puis définir explicitement  $f^{-1}(x)$ .
7. Tracer la courbe  $(C')$  de  $f^{-1}$  dans le même repère.

**Sujet 34\*\*\*** : Étude des solutions d'une équation.

1. On considère l'équation (E) :  $|x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ .

Démontrer que (E) admet trois solutions  $x_1 ; x_2$  et  $x_3$  telles que :

$$-\frac{1}{2} < x_1 < 0 \quad 0 < x_2 < \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

2. Pour  $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$ , on pose  $u_i = \frac{3}{2} \left( x_i - \frac{1}{3} \right)$ .

Démontrer qu'il existe un unique nombre réel  $\theta_i$  élément de  $[0 ; \pi]$  tel que :  $u_i = \cos \theta_i$ .

3. a. Démontrer que  $\theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$  sont des solutions dans  $[0 ; \pi]$  de l'équation :

$$\cos 3\theta = \frac{1}{2}.$$

- b. En déduire les solutions de (E).

**Sujet 35\*\*\*** : Étude d'une fonction radicale.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$ . On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} - x$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative.

**Partie I** : Étude d'une fonction auxiliaire.

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x - \sqrt{1 + x^2}$ .

1. Calculer les limites aux bornes de  $D_g$ .
2. Étudier les variations de  $g$  puis construire son tableau de variations complet.
3. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ , déterminer cette valeur puis donner un encadrement à  $10^{-2}$  près.
4. Étudier le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie II** : Étude de la fonction  $f$  et construction de sa courbe représentative  $(C)$ .

1. Calculer les limites aux bornes de  $D_f$ .
2. Montrer que pour tout  $x$  réel,  $f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1 + x^2}}$ .
  - a. En déduire les variations de  $f$  puis donner son tableau de variations.
  - b. Montrer  $f(\alpha) = 3\alpha$ .
3. Démontrer que la courbe représentative  $(C_f)$  de  $f$  admet deux asymptotes  $(D)$  et  $(D')$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
4. Représenter graphiquement  $(C_f)$  puis construire les asymptotes  $(D)$  et  $(D')$  dans le même graphique.

**Partie III** : Accroissement finis et encadrement.

1. Montrer que pour tout  $x \in [1 ; 2]$ ,  $|f'(x)| \leq 2\sqrt{2}$ .
2. Donner un encadrement de  $f(2) - f(x)$  pour tout  $x \in [1 ; 2]$ .  
En déduire que pour tout  $x \in [1 ; 2]$ ,  $|f(x) - 2\sqrt{5} + 2| \leq 2\sqrt{2}|x - 2|$ .

### Dérivabilité et fonctions réciproques.

**Sujet 36\*** : Dérivabilité sur un intervalle.

Dans chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  sur son ensemble de définition puis déterminer sa dérivée.

- a)  $f(x) = x^2|x|$
- b)  $f(x) = (x - 2)\sqrt{2 - x}$
- c)  $f(x) = \sqrt{2x + 5}$
- d)  $f(x) = (x + 1)\sqrt{x^2 - 3x - 4}$

**Sujet 37\*** : Calcul de dérivées.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction  $f$  après avoir déterminé son ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité sur lequel elle est dérivable.

- a)  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$
- b)  $f(x) = \sqrt{(x^2 + 1)^3}$

$$c) f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 12}{7x - 1}$$

$$d) f(x) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

$$e) f(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

$$f) f(x) = x + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

**Sujet 38\*** : Dérivée d'une fonction composée.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la dérivée de la fonction  $f$ .

$$a) f(x) = \sin(x - x^2)$$

$$b) f(x) = \cos(x^2 + 3x)$$

$$c) f(x) = \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$d) f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$e) f(x) = \tan(\tan x)$$

$$f) f(x) = \sin\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$$

**Sujet 39\*** : Dérivées successives.

- Déterminer la fonction dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la fonction :  $x \mapsto \sin x$ . (On exprimera chacune des dérivées successives sous la forme d'un sinus.)
- Même question pour la fonction :  $x \mapsto \cos x$ .

**Sujet 40\*** : Dérivées successives.

$n$  étant un nombre entier naturel, déterminer la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{x-a}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ .

**Sujet 41\*** : Dérivées d'une suite de termes

$n$  étant un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$ .

- Déterminer la dérivée sur  $] -\infty ; 1[$  et sur  $] 1 ; +\infty[$ .
- Démontrer que pour tout  $x \neq -1$ ,  $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$
- En déduire une expression de :  $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n-1)x^{n-1}$

**Sujet 42\*** : Comparaison des nombres

- Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour obtenir une majoration du nombre :  $\sqrt{33} - \sqrt{32}$ .
- Démontrer que pour tout nombre réel  $a$  de l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ , on a :  $a \leq \tan a \leq 2a$ .
- Démontrer que pour tout nombre réel  $a$  et  $b$  de  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ,  
on a :  $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$ .

**Sujet 43\*\*** : Réciproque d'une bijection continue et strictement monotone.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ .

1. Étudier les variations de  $f$
2. Montrer que  $f$  sur un intervalle  $I$  que l'on déterminera.
3. On désigne par  $g$  la fonction réciproque de  $f$ . Calculer  $g(1)$  ;  $g(\sqrt{2})$  et  $g(2)$ .
4. Montrer que  $g$  est dérivable sur  $I$  et que :  $\forall x \in I$ ,  $g'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$ .
5. Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $h(x) = f(x) + \frac{1}{4}$ . Montrer que l'équation  $h(x) = x$  admet une solution unique  $x_0$  telle que  $\frac{\pi}{3} < x_0 < \frac{\pi}{2}$ .

**Sujet 44\*\*** : Continuité – prolongement-dérivabilité en un point.

Soit  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x \neq 1$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2}{x - 1}$ .

1. Montrer que, pour tout réel  $x \neq 1$ ,  $f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2 + 1} + 2}$ .
2. a) la fonction  $f$  est-elle continue en 1 ? Justifier la réponse  
b) Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 1, préciser alors ce prolongement par continuité.
3. Soit  $g$  la fonction définie par : 
$$\begin{cases} g(x) = f(x), & \text{pour } x \neq 1 \\ g(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$
 et  $(\xi)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$ .  
a) Montrer que la fonction  $g$  est dérivable en 1, en déduire le nombre dérivée  $g'(1)$ .  
b) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\xi)$  au point d'abscisse 1.

**Sujet 45\*\*** : Continuité – dérivabilité et équation de la tangente.

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = |x + 1| + \frac{1}{x - 1}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$ .

1. Préciser l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .
2. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition. Préciser des éventuelles conséquences graphique.
3. Démontrer que la courbe  $(C_f)$  admet deux asymptotes obliques dont on précise les équations.
4. Étudier la dérivabilité de  $f$  en -1. En déduire l'ensemble de dérivabilité de  $f$ .
5. Montrer en étudiant les variations de  $f$  que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\alpha \in ]-2 ; -1[$  et  $\beta \in [0 ; 1]$ .
6. Déterminer les équations des demi-tangentes à  $(C_f)$  au point  $-1$ .
7. Tracer la courbe  $(C_f)$  ainsi que ses asymptotes et demi-tangentes.

**Sujet 46 \*\*:** Fonction périodique et dérivabilité.

Soit  $f$  une fonction de période 1 définie sur  $]0 ; 1[$  par  $f(x) = 2x^3 + bx^2 + cx$  où  $b$  et  $c$  sont des réels.

$f$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$ ? Justifier votre réponse.

**Sujet 47 \*\*:** Fonction réciproque.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] - 1 ; 1[$  par  $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

1. Étudier les variations de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $] - 1 ; 1[$  vers  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que pour tout  $x$  réel,  $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$ .
4. Soit  $h$  la fonction définie sur  $] - 1 ; 1[$  par  $h(x) = f\left(-\sin\frac{\pi}{2}x\right)$ .
  - a) Montrer que pour tout  $x \in ] - 1 ; 1[$ ,  $h(x) = -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ .
  - b) Montrer que  $h$  réalise une bijection de  $] - 1 ; 1[$  vers  $\mathbb{R}$ .
  - c) Montrer que  $h^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que  $(h^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi[1+(x+1)^2]}$ .
5. Soit pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  la fonction  $H$  tel que :  $H(x) = h^{-1}(x-1) + h^{-1}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$ .
  - a) Montrer que  $H$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et déterminer  $H'(x)$ .
  - b) Calculer  $H(1)$  et  $H(-1)$ .
  - c) En déduire la formule explicite de  $H$  sur  $] - \infty ; 0[$  et sur  $]0 ; +\infty[$ .

**sujet 48 \*\*:** Étude d'une équation.

Soit  $n$  un entier naturel ( $n \geq 1$ ). On considère l'équation (E):  $x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0$ .

1. En étudiant les variations de la fonction  $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$ , montrer que l'équation (E) admet une solution  $\alpha_n$  dans  $[0 ; 1]$ .
2. (a) Calculer  $f_{n+1}(\alpha_n)$  et  $f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ .  
(b) Déduire la monotonie de la suite  $(\alpha_n)$ .  
(c) Déduire que la suite  $(\alpha_n)$  converge.
3. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $\alpha_n - \frac{1}{2} = \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{2}$  et déduire la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .

**Sujet 49 \*\*:** Tangente de la courbe d'une fonction rationnelle.

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels.

Soit  $(\xi)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O ; I ; J)$ .

1. Déterminer  $a$  et  $b$  pour que la droite  $(\delta): y = 4x + 3$  soit tangente à la courbe  $(\xi)$  au point  $I(0 ; 3)$ .

2. Étudier les variations de  $f$  puis tracer  $(\xi)$ .
3. Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = \frac{3x^2 + 4|x| + 3}{x^2 + 1}$ 
  - a) Étudier la parité de  $g$ .
  - b) En déduire sans nouveaux calculs la représentation graphique  $(C_g)$  de  $g$  dans le même repère que  $(\xi)$ .

**Sujet 50 \*\* : Étude des solutions d'une équation .**

Soit  $a \in [0 ; 1]$  , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

On considère la fonction  $P_n$  définie par la relation:  $P_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - a$  .

1. Montrer que l'équation  $P_n(x) = 0$  admet une unique solution positive que l'on notera  $x_n$  puis montrer que  $x_n < a$  .
2. Étudier le signe de  $P_{n+1}(x_n)$ . En déduire que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est monotone.
3. Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est convergente. On note  $l$  sa limite.  
Prouver que  $0 \leq x_n \leq 1$
4. Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  le nombre  $x_n$  est la solution de l'équation  $x^{n+1} - (a+1)x + a = 0$  . En déduire que  $l = \frac{a}{a+1}$  .

**Sujet 51 \*\* : Fonctions réciproques**

Soit la fonction  $f$  définie  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$  et que  $f'(x) = \frac{-1}{2x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \quad \forall x \geq 1$  .  
b) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
2. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  sur un intervalle  $J$  qu'on précisera.
3. a) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $]1, \sqrt{2}]$  . Calculer  $(f^{-1})'(\sqrt{2})$  .  
b) Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$  .
4. Exprimer  $f^{-1}(x)$  pour tout réel  $x \in ]1, \sqrt{2}]$  .

**Sujet 52 \*\* : Dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'une fonction quotient.**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  .

1. Déterminer les nombres entiers naturel non nul  $a$  et  $b$  tels que :  
 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$  .
2. Soit  $n$  un nombre entier naturel non nul ; démontrer qu'il existe un polynôme  $P_n$  , de degré  $n$  , tel que :  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}, f^n(x) = (-1)^n \frac{n! P_n(x)}{2(x^2 - 1)^{n+1}}$  où  $f^{(n)}$  est la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $f$  .

**Sujet 53 \*\*: Branches infinies – centre de symétrie – bijection**

Partie A: Soit  $f$  la fonction définie par:  $f(x) = \frac{3(x-1)^2}{3x^2+1}$  et soit  $(c)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique 1 cm).

1. Déterminer les réels  $a$ ;  $b$ ;  $c$  tel que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{3x^2+1}$ .
2. Déterminer l'ensemble de définition  $Df$  de  $f$  puis les limites de  $f$
3. Montrer que  $f$  est dérivable sur  $Df$  et calculer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
5. Montrer que la courbe  $(c)$  de  $f$  admet une droite  $(D)$  asymptote que l'on déterminera.
6. Étudier la position de  $(c)$  par rapport à son asymptote  $(D)$ .
7. Montrer que  $(c)$  admet un centre de symétrie dont on calculera les coordonnées.
8. Donner une équation de la tangente  $(T)$  à  $(c)$  au point d'abscisse  $x=0$ .
9. Montrer que l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution unique  $1$  dans  $Df$ . Donner une valeur
10. approchée de  $1$  à  $10^{-2}$  près par excès.
11. Tracer  $(D)$ ;  $(T)$  et la courbe  $(c)$  de  $f$ .

**Sujet 54 \*\*: Formule du binôme**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = (1+x)^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

1. Déterminer la dérivée de  $f$ .
2. Après avoir développer  $f(x)$  par la formule du binôme, donner une autre expression de cette dérivée.
3. En déduire la valeur des sommes suivantes :
  - a)  $\sum_{p=1}^n p C_n^p = 1 C_n^1 + 2 C_n^2 + 3 C_n^3 + \dots + n C_n^n$
  - b)  $\sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} p C_n^p = 1 C_n^1 - 2 C_n^2 + 3 C_n^3 + \dots + (-1)^n n C_n^n$

**Sujet 55 \*\*: Fonction définie par intervalles -axe de symétrie**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$  et  $(\hat{E})$  sa courbe représentative.

1. Écrire  $f(x)$  sans le symbole « valeur absolue ».
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur son ensemble de définition.  $(\hat{E})$  admet-elle des tangentes aux points d'abscisses 1 et 5 ?
3. Étudier les variations de  $f$ .
4. Démontrer que les droites d'équations  $y = x - 3$  et  $y = -x + 3$  sont asymptotes à  $(\hat{E})$ .
5. Tracer  $(\hat{E})$  et démontrer qu'elle admet un axe de symétrie, dont on précisera une équation.
6. Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[1; 5]$ , le point  $M \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$  est à une distance constante du point  $\Omega \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . En déduire la nature de  $(\hat{E})$  sur l'intervalle  $[1; 5]$ .

**Sujet 56 \*\*: Fonction définie avec paramètre réel.**

Pour chaque entier  $k$  strictement positif, on définit une application  $f_k$  de  $\mathbb{R}$  qui à tout  $x$  associe

$$f_k(x) = \frac{x^k}{\sqrt{x^2 + 1}}. \text{ On appelle } f_0 \text{ l'application de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ qui à tout } x \text{ associe}$$

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

1. a) Démontrer que pour chaque  $k \geq 1$ , la fonction  $f_k$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+$ ; en déduire suivant la parité de l'entier  $k$ , le sens de variation des fonctions  $f_k$ .

b) Étudier, en discutant suivant les valeurs de  $k \geq 1$ , les limites de  $f_k(x)$  et de  $\frac{f_k(x)}{x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Que peut-on en déduire pour les branches infinies des courbes représentatives  $(\xi_k)$  des fonctions  $f_k$  ?

c) Démontrer que les courbes  $(\xi_k)$  passent par deux points fixes que l'on précisera; construire sur une même figure dans un plan muni d'un repère orthonormé  $(O; I; J)$  les courbes  $(\xi_1)$ ;  $(\xi_2)$  et  $(\xi_3)$  on précisera s'il y a des asymptotes. (On prendra 2 cm comme unité).

### **Sujet 57\*\*\*: Étude du mouvement d'un point.**

Toutes les représentations graphiques demandées dans ce problème seront faites sur la même feuille, l'unité graphique sera de 5 cm.

Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(O; I; J)$ .

#### **Partie A :**

1. Soit  $(C)$  le cercle de centre  $\omega(1; 0)$  et de rayon 1. Tracer  $(C)$  et en donner une équation dans le repère  $(O; I; J)$ .

2. Soient  $(\Delta)$  la droite d'équation  $x = 1$  et  $(D)$  la droite d'équation  $y = tx$  où  $t$  est un nombre réel.

$(D)$  coupe  $(\Delta)$  au point  $M_0$  et le cercle  $(C)$  aux points  $O$  et  $M_1$ .

On définit le point  $M$  par la relation :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_0M_1}$ .

a) Tracer  $(\Delta)$ ;  $(D)$ ;  $M_0$ ;  $M_1$  et  $M$  dans les cas particuliers où  $t = 0$ ;  $t = \frac{1}{2}$  et  $t = 1$ .

3. Lorsqu'on fait varier  $t$  dans  $\mathbb{R}$ , démontrer que les points  $M$  se trouvent sur la courbe  $(S)$  d'équation :  $(x - 1)x^2 + (x + 1)y^2 = 0$ .

**Partie B :** Le but de cette partie est de représenter graphique la courbe  $(S)$ .

1. On définit la fonction  $f$  par :  $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ .

a) Donner l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ .

b) Donner l'ensemble de définition de la fonction dérivée de  $f$  et calculer  $f'$ .

c) Étudier le signe de  $f'$ . En déduire le tableau de variation de  $f$ .

2. a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ . Que peut-on conclure ?

b) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point  $O$ .

3. a) Représenter graphiquement  $f$ . Soit  $S_1$  la courbe obtenue

b) Comment peut-on en déduire  $(S)$  de  $S_1$  ?

c) Représenter graphiquement  $(S)$ .

**Partie C : Étude de la trajectoire .**

On considère maintenant  $M$  comme un point mobile dont les coordonnées sont données dans un repère  $(O ; I ; J)$  en fonction de  $t$  ;

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in [0 ; +\infty[$$

1. a) Donner la trajectoire du mobile  $M$  et indiquer le sens dans lequel elle est parcourue  
b) A quel instant  $t$  le mobile traverse-t-il l'axe  $Ox$  ?
2. A quel instant le mobile atteint-il son ordonnée maximale ?
3. Calculer le vecteur vitesse  $\vec{V}$  et le vecteur accélération  $\vec{\Gamma}$  du mouvement en fonction de  $t$ .

**Sujet 58 \*\*\*: Un polynôme de degré  $n$**

1. Soit la fonction  $f : x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ .  
Étudier les variations de la fonction  $f$  et tracer sa courbe représentative  $(C_f)$ .
2. Soit les fonctions :  
 $g : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$  et  $h : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$ .  
Étudier le sens de variations de  $g$  et  $h$  sur  $]0 ; +\infty[$ .
3. Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $P_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
$$P_n(x) = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{1+x^2})^n + (x - \sqrt{1+x^2})^n]$$
  - a) Démontrer que  $P_n$  est une fonction polynôme dont on précisera le degré.
  - b) Soit la fonction  $\varphi_n : x \mapsto x^n$ .  
Démontrer que l'on a, suivant la parité de  $n$  :  $P_n = g \circ \varphi_n \circ f$  ou  $P_n = h \circ \varphi_n \circ f$ .
  - c) En déduire le sens de variations de  $P_n$ .

**Sujet 59 \*\*\*: Encadrement de  $\sqrt{1+a}$ .**

1. a) Démontrer que la courbe représentative de la fonction, l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$  est au-dessus de sa tangente en tout point.  
b) En déduire que :  $\forall \alpha \in [0 ; +\infty[ , \frac{1}{1+\alpha} \geq 1 - \alpha$ . (1).
2. Soit la fonction  $g : x \mapsto \sqrt{1+x}$  et  $a$  un nombre réel strictement positif.
  - a) Déterminer les dérivées première et seconde de  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ .
  - b) Vérifier que :  
$$\forall x \in [0 ; a[ , \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$$
  - c) En appliquant l'inégalité  $[0 ; a]$ , démontrer que :  
$$1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$$
 (2)
3. Déduire des inégalités (1) et (2) que :

$$\forall \alpha \in [0; +\infty[ , 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2} .$$

#### 4. Application

Établir les inégalités suivantes .

- $1,0475 \leq \sqrt{1,1} \leq 1,05$
- $100,00499975 \leq \sqrt{10\,001} \leq 100,005$
- $5,098 \leq \sqrt{26} \leq 5,1$  .

En déduire une valeur approchée des nombres  $\sqrt{1,1}$  ,  $\sqrt{10\,001}$  et  $\sqrt{26}$  , en précisant à chaque fois l'incertitude.

## FICHE MÉTHODE 2

### SUITES RÉELLES

#### 1. Comment étudier le sens de variations d'une suite $(u_n)$ ?

- ✓ On compare  $u_n$  et  $u_{n+1}$ , ce qui revient aussi à étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$  ;
- ✓ Pour une suite à termes positifs, on compare  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et 1 .
- ✓ Lorsque  $u_n$  est définie par une formule explicite :  $u_n = f(n)$ . On étudie les sens de variation de la fonction  $f$ .
- ✓ Lorsque  $u_n$  est définie par une formule de récurrence :  $u_{n+1} = g(u_n)$ . On utilise un raisonnement par récurrence ( éventuellement le sens de variation de  $g$  ).

#### 2. Comment peut-on démontrer qu'une suite est bornée ?

On peut utiliser l'un des procédés suivants :

- ✓ Encadrer le terme général de la suite par deux nombres réels.
- ✓ Étudier la fonction  $f$ , lorsque la suite est du type :  $u_{n+1} = f(n)$ .
- ✓ Faire un raisonnement par récurrence.

#### 3. Comment étudier la limite de la suite $(u_n)$ dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$ ?

On peut utiliser l'un des procédés suivants :

1. Utiliser le graphique pour conjecturer le résultat ;
2. Résoudre l'équation  $f(x) = x$  ;
3. Démontrer le résultat conjecturé .

#### 4. Comment montrer qu'une suite $(u_n)$ converge ou non ?

On montre l'un des théorèmes suivants :

##### Cas de convergence :

- ✓ Si  $(u_n)$  est une suite croissante et majorée alors elle converge vers un réel  $\ell$  et pour  $n$  de  $I$  :  
 $u_n \leq \ell$ .
- ✓ Si  $(u_n)$  est une suite décroissante et minorée alors elle converge vers un réel  $\ell$  et pour  $n$  de  $I$  :  $u_n \geq \ell$ .

##### Cas de non convergence ( divergence ) :

- ✓ Si  $(u_n)$  est une suite croissante et **non majorée** alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  .
- ✓ Si  $(u_n)$  est une suite décroissante et **non minorée** alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  .

**5. Comment calculer la limite d'une suite définie par :  $u_{n+1} = f(u_n)$  qui converge vers un réel  $\ell$  ?**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- ✓ Si  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  et  $f$  continue en  $\ell$ , alors  $\ell = f(\ell)$ .

**6. Suites adjacentes**

Pour montrer que deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes, on peut montrer que les trois points suivants :

- ✓  $\forall n \in \mathbb{I}, u_n \leq v_n$
- ✓  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  décroissante
- ✓  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

**7. Suites arithmétiques – suites géométriques**

Suites arithmétiques	Suites géométriques
$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = qu_n$
$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 q^n$
$u_p = u_s + (p - s)r$	$u_p = u_s q^{p-s}$