Enseignant : **Beh Yacouba Coulibaly**

RCI : Union discipline travail

FONCTIONS LOGARITHMES ($\mathrm{T^{LE}C}$)

2024 – 2025

ACTIVITE

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f qui sont dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et vérifient : pour tous réels a et b strictement positifs, $f(a\times b)=f(a)+f(b)$.

1. Calcule $f(1)$.

2. Soit a un nombre réel strictement positif. Pour tout réel x strictement positif, on pose : $f(a)+f(x)=f(ax)$.

  a. Démontre que $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=af'(ax)$.

  b. Déduis-en qu'il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel a strictement positif, on a : $f'(a)=k\times\frac{1}{a}$.

3. On appelle **ln** la primitive de la fonction $x\longmapsto\frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ qui s'annule en 1.

Démontre que toutes les fonctions vérifiant $f(a\times b)=f(a)+f(b)$ sont de la forme $k\times\ln$ où k est un nombre réel.

4. Etude de la réciproque

Soit a un nombre réel strictement positif et F la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x)=\ln(ax)$.

  a. Démontre que F est une primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction $x\longmapsto\frac{1}{x}$.

  b. Déduis-en qu'il existe un réel c tel que, pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, on ait : $F(x)=\ln(x)+c$. Détermine le réel c en donnant à x la valeur 1.

  c. Déduis-en que la fonction ln vérifie : pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ et qu'il en est de même pour les fonctions $k\times\ln$ où est un nombre réel quelconque.

Les fonctions, non nulles, du problème posé, sont appelées **fonctions logarithmes**.

Le désespoir renonce mais l'espoir n'abandonne jamais.