

Ministère de l'Education Nationale Académie de Thiès, Lycée de Fissel Mbadane	Série d'exercices N° 13 Discipline : Mathématiques Calcul des probabilités	Année Scolaire : 2023-2024 Classe : TS <sub>1</sub> Cellule de Mathématique
---	--	---

I) **Dénombrement** ; Dans une urne se trouvent 9 boules : 4 rouges numérotées (0, 1, 1, 2), 3 vertes numérotées (1, 2, 2) et deux noires numérotées (1, 3).

On en tire trois boules et on considère les événements suivants :

A : « Obtenir trois boules de couleurs différentes deux à deux »

B : « Obtenir trois boules qui portent le même numéro »      D : « Obtenir au moins une boule rouge »

C : « La somme des numéros des boules tirées est égale à 4 »

Trouver le nombre de possibilités des événements A, B, C et D dans les cas suivants :

- 1) Tirage de 3 boules simultanément      3) Tirage de 3 boules successivement sans remise.
- 2) Tirage de 3 boules successivement avec remise

II) **Calculs de Probabilité** :

**Exercice 01** : Une urne contient dix boules blanches et dix boules rouges indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de cette urne ; si elle est rouge on la remet dans l'urne, et si elle est blanche on la substitue par trois boules rouges à rajouter dans l'urne à la place de la boule blanche exclue. Puis on tire une boule de l'urne.

- 1) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges
- 2) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches
- 3) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.
- 4) Calculer la probabilité d'obtenir la 1<sup>ère</sup> boule tirée étant blanche sachant que la 2<sup>e</sup> est de couleur blanche.

**Exercice 02** : Un sac contient n boules ( $n \geq 4$ ) indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On tire simultanément 4 boules de ce sac.

- 1) Combien y-t-il de tirages possibles ?
- 2) On considère la variable aléatoire X égale au plus grand numéro obtenu en effectuant le tirage ci-dessus.
  - a) Déterminer la loi de probabilité de X
  - b) Déduire, en fonction de n, une expression de  $\sum_{k=4}^n C_{k-1}^3$  à l'aide d'un unique coefficient binomial.
- 3) Déterminer n afin que la probabilité de l'événement  $X = n - 1$  soit égale à 0,2.
- 4) Déterminer, à 0,1 près, l'espérance mathématique de X pour chacune des valeurs trouvées à la question précédente.

**Exercice 03** : Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher marquées 1, 2, 3 et 4. Une épreuve consiste à prélever une première boule de l'urne dont le numéro sera noté a puis, sans la remettre dans l'urne, une seconde boule dont le numéro sera noté b. Au couple (a, b) d'une épreuve, on associe l'application f du

plan complexe, rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , dans lui même qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $z' = \frac{a}{2} e^{i\frac{b\pi}{4}} z$ .

- 1) Donner tous les couples  $(a, b)$ . Caractériser géométriquement les applications qui ne sont pas des isométries.
- 2) Soit  $A$  le point d'affixe  $z_0 = 2i$  et  $A'$  son image par  $f$  d'affixe  $z'_0$ . Calculer le module et l'argument de  $z_0$  et ceux de  $z'_0$  suivant les valeurs de  $(a, b)$  où  $b$  est impair.
- 3) Calculer la probabilité de l'évènement  $E$  : « les droites  $(OA)$  et  $(OA')$  sont perpendiculaires »
- 4) Quelle est la loi de la probabilité de la variable aléatoire  $X$  qui qu résultat  $(a, b)$  d'une épreuve associe le module  $z'_0$ ? Calculer l'espérance mathématique de  $X$ .

**Exercice 04 :** Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

- 1) On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne. On note :

- $A_0$  l'évènement « on n'a obtenu aucune boule noire »,
- $A_1$  l'évènement « on a obtenu une seule boule noire »,
- $A_2$  l'évènement « on a obtenu deux boules noires ».

Montrer que  $p(A_0) = \frac{6}{15}$  et  $p(A_1) = \frac{8}{15}$  ; en déduire  $p(A_2)$ .

- 2) Après ce premier tirage, il reste 4 boules dans l'urne. On effectue à nouveau un tirage sans remise de deux boules de l'urne. On note :
  - $B_0$  l'évènement « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage numéro 2 »,
  - $B_1$  l'évènement « on a obtenu une seule boule noire au tirage numéro 2 »,
  - $B_2$  l'évènement « on a obtenu deux boules noires au tirage numéro 2 »
    - a) Calculer  $p(B_0 / A_0)$ ,  $p(B_0 / A_1)$ ,  $p(B_0 / A_2)$
    - b) Calculer  $p(B_0)$ ,  $p(B_1)$  et  $p(B_2)$
- 3) On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier tirage ?
- 4) On considère l'évènement  $R$  : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient tirées de l'urne ». Déterminer  $p(R)$ .

**Exercice 05 :** Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On considère  $M(t)$  un point mobile de On lance deux fois de suite un dé non pipé à six faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6. On désigne respectivement par  $a$  et  $b$  les numéros apparus sur la face supérieure au premier et au second lancer.

On définit une suite numérique  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation  $aU_{n+1} + (b - a)U_n = 0$ .

- 1) La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle arithmétique ou géométrique ?
- 2) Déterminer la probabilité  $p_1$  pour que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit une suite constante .
- 3) Déterminer les probabilités des événements suivants :

$A$  ; « la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente. »

$B$  : « La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite alternée (les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs) »

C : « La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite alternée et convergente »

4) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.

**Exercice 06 :** Sur les quatre faces d'un dé pipé tétraédrique sont inscrits les nombres complexes suivants :

$$z_0 = -2i, \quad z_1 = -2 - 2i, \quad z_2 = 1 - i, \quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}$$

On lance une fois ce dé. La probabilité  $p_k$  pour que la face marquée  $z_k$  soit cachée est  $p_k = c|z_k|^2$ , pour  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$  et  $c \in \mathbb{R}_+^*$ .

1) a) Montrer que  $c = \frac{1}{18}$ .

b) Déterminer  $p_k$  pour  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

2) On désigne par X la variable aléatoire qui, au complexe inscrit sur la face cachée associe son argument appartenant à l'intervalle  $[0; 2\pi[$ .

a) Déterminer les valeurs prises par X.    c) Calculer l'espérance mathématique de X.

b) Donner la loi de probabilité de X.

**Exercice 07 :**

1) En notant  $p(A/B)$  la probabilité de l'évènement « A sachant B » et  $\bar{B}$  l'évènement contraire de B, démontrer que :

$$p(A/\bar{B}) = \frac{p(A) - p(A/B) \times p(B)}{1 - p(B)}$$

2) Lors d'une récente saison de chasse (période durant laquelle la chasse est autorisée dans une région donnée), on a pu établir les statistiques suivantes ; 30% des renards sont enrégés ; parmi les renards abattus, 40% étaient enrégés.

a) En désignant par b ( $b \neq 1$ ) la probabilité pour qu'un renard soit abattu lors de la saison de chasse, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un renard survivant soit enrégé. (Durant la période considérée, on négligera les autres causes de décès ainsi que les nouveaux cas de rage )

b) Quelle est la plus petite valeur de b pour que p soit inférieure ou égale à 0,1 ?

c) A l'issue d'une saison de chasse, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à  $\frac{1}{3}$ . Une chasses est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la saison de chasse. Quelle est, dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir décontaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la saison ?

**Exemple 08 :** Soient un jeton à deux faces numérotées 1 et 2 et un dé à 6 faces. On jette simultanément le jeton et le dé. On note X la variable aléatoire attachée à chaque issue qui représente le nombre de chiffres pairs puis on lit les chiffres de l'issue.

1) Donner la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

2) On constitue à l'aide de cette expérience un jeu de chance qui est le suivant : Le joueur mise 600FCFA et lance simultanément le jeton et le dé et on lit les chiffres qui apparaissent sur la face du dé.

- Si le joueur n'obtient aucun nombre pair, il gagne 900FCFA.
- Si le joueur obtient un unique chiffre pair, il perd sa mise.

- Si le joueur obtient deux nombres pairs, il gagne 1200FCFA.

Soit  $G$  la variable aléatoire qui représente le gain algébrique, c'est-à-dire le gain moins la mise de départ.

- Déterminer la loi de probabilité de  $G$ .
- Calculer l'espérance mathématique la variance et l'écart-type associée à  $G$ .
- Ce jeu est-il favorable au joueur ?

**Exercice 09 :** La probabilité que l'élève Mariama arrive en retard à l'école le 1<sup>er</sup> jour est  $\frac{1}{5}$ .

- Si elle est en retard un jour donné, la probabilité qu'elle soit en retard le lendemain est  $\frac{1}{20}$ .
- Si elle est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'elle soit en retard le lendemain est  $\frac{1}{5}$ .

On appelle  $R_n$  l'évènement : « Mariama est en retard le jour  $n$  » et  $p_n$  la probabilité de  $R_n$ .

- Déterminer  $P(R_n \cap R_{n+1})$  et  $P(\overline{R_n} \cap R_{n+1})$  en fonction de  $p_n$ .
- En déduire que  $p_{n+1} = -\frac{3}{20}p_n + \frac{1}{5}$ .
- On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = p_n - \frac{4}{23}$ .
  - Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{3}{20}$ .
  - Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{R_n})$ .

**Exercice 10 :**

**I)** 1) Montrer que si  $13 \wedge a = 1$  alors  $a^{2016} \equiv 1[13]$  ;  $a \in \mathbb{Z}$

2) Soit (E):  $x^{2015} \equiv 2[13]$  ;  $x \in \mathbb{Z}$

a) Montrer que si  $x$  est solution de (E) alors  $x \wedge 13 = 1$ .

b) Montrer que si  $x$  est solution de (E) alors  $x \equiv 7[13]$ .

3) Montrer que  $S = \{7 + 13k; k \in \mathbb{Z}\}$  est l'ensemble des solutions de (E)

**II)** Une urne contient 50 boules numérotées de 1 à 50. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de cette urne.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule avec un chiffre qui soit solution de l'équation de (E) ?

2) On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la range à nouveau dans l'urne.

On répète ce procédé 3 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois la même boule portant un chiffre qui soit solution de l'équation (E) ?

**Exercice 11 :** On considère les fonctions numériques  $f, g$  et  $h$  définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = (x^2 + x) \ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} g(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} h(x) = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{array} \right.$$

**Partie I :**

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f, g$  et  $h$  en  $x_0 = 0$ .

2) Montrer que  $\forall x \leq 0, \ln(1+x^2) \leq x^2$ . En déduire que  $\forall x \in [0; 1], g(x) \leq x$ .

**Partie II :** Lors d'un examen oral de mathématique, chaque candidat devra tirer une des trois enveloppes identiques dans une urne. Les trois enveloppes contiennent, l'une la fonction  $f$ , l'autre la fonction  $g$  et la

troisième la fonction  $h$ . Le candidat étudiera la continuité et la dérivabilité en  $x_0 = 0$  de la fonction qu'il aura choisie. On suppose les tirages équiprobables.

- 1) Calculer la probabilité pour qu'un candidat donné tire une enveloppe contenant une fonction continue et dérivable en  $x_0 = 0$ .
- 2) Au tour d'un candidat Lambda, connu déjà de son examinateur qu'il ne peut répondre qu'à la question concernant la fonction  $f$ , il lui est accordée de procéder par tirages successifs sans relise jusqu'à obtenir la fonction  $f$ . On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le fameux candidat.  
a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$  b) Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ . c) construire la fonction de répartition de  $X$ .

### Exercice 12 :

**Partie A :** Une urne contient quatre jetons numérotés 1, 2, 3 et 4. On tire au hasard un premier jeton de l'urne. On note  $a$  le numéro porté par ce jeton puis on le remet dans l'urne. On tire un deuxième jeton de l'urne et on note  $b$  le numéro qu'il porte.

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé direct de l'espace. On y considère les vecteurs  $\vec{u}(a, -1, 1 - a)$  et  $\vec{v}(b - 5, 1, 4 - b)$

- 1) a) Montrer que  $\vec{u} \wedge \vec{v} = (a + b - 5)\vec{w}$  où  $\vec{w}$  est un vecteur à déterminer.  
b) Trouver une relation entre  $a$  et  $b$  pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient colinéaires.
- 2) a) Dans le cas où  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, déterminer l'équation cartésienne du plan  $Q$  passant par  $A(-2, , 3)$  et de vecteur directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .  
b) Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient colinéaires est égale à 0,25.

**Partie B :** Deux joueurs Abdou et Boubacar jouent à un jeu constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après :

Au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage décrit dans la partie A.

- ✓ Si Abdou obtient des vecteurs colinéaires et Boubacar non alors Abdou gagne la partie et le jeu s'arrête.
- ✓ Si non, si Boubacar obtient des vecteurs colinéaires et Abdou non, Boubacar gagne la partie et le jeu s'arrête.
- ✓ Dans tous les autres cas les joueurs entreprennent une nouvelle partie, le jeu continue.

Soit  $A_n$  l'évènement : « Abdou gagne la nième partie »  $B_n$  l'évènement : « Boubacar gagne la nième partie »

$C_n$  l'évènement : « Le jeu continue »

- 1) Calculer les probabilités  $p(A_1)$ ,  $p(B_1)$ ,  $p(C_1)$
- 2) Exprimer  $p(C_n)$  en fonction de  $p(C_{n-1})$  puis en fonction de  $n$
- 3) a) Exprimer  $p(A_n)$  en fonction de  $p(C_{n-1})$  puis en fonction de  $n$   
b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n)$ . c) Déterminer le plus petit entier  $n_0$  tel que  $p(n_0) \leq 10^{-2}$

**Exercice 13 :** On place dans un sac six jetons indiscernables au toucher, marqués :  $-3, -2, -1; 1; 2; 3$ . On

tire jeton du sac, on note « a » son numéro. On le remet dans le sac, puis on tire un deuxième jeton et on note « b » son numéro.

Au couple (a, b) obtenu, on associe l'ensemble  $(E_{a,b})$  des points M dont les coordonnées (x, y) dans le plan (P) rapporté à un couple orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  vérifiant l'équation :  $bx^2 + ay^2 - bx + ay + \frac{a+b-4ab^2}{4} = 0$ .

- 1) Démontrer que pour tout couple (a, b), l'ensemble  $(E_{a,b})$  est une conique à centre dont on précisera les coordonnées du centre.
- 2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :  
C : «  $(E_{a,b})$  est un cercle »                      E : «  $(E_{a,b})$  est une ellipse non réduite à un centre »  
H : «  $(E_{a,b})$  est une hyperbole »                      H' : «  $(E_{a,b})$  est une hyperbole équilatère »
- 3) On donne a = 3 et b = 2. Déterminer les éléments géométriques de  $(E_{3,2})$  : axe focal, foyers, sommets.
- 4) On donne a = -3 et b = 2. Déterminer les éléments géométriques de  $(E_{-3,2})$  : axe focal, foyers, sommets.
- 5) Construire  $(E_{3,2})$ ,  $(E_{-3,2})$  et  $(E_{2,2})$  dans un même repère.

**Exercice 14 :** Un sac contient 30 boules indiscernables au toucher dont  $\alpha$  noires,  $\beta$  blanches et  $\gamma$  rouges. On suppose qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur. On tire au hasard et simultanément deux boules du sac. Soit l'évènement E ; « Obtenir deux boules de même couleur »

- 1) Calculer en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  la probabilité  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  de l'évènement E.
- 2) On se propose de déterminer  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  afin que  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  soit minimale. Pour cela on munit l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et on considère les points A(30, 0, 0), B(0, 30, 0) et C(0, 0, 30). Soit le point M( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) de  $\mathcal{E}$ .
  - a) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :  $x + y + z - 30 = 0$ .
  - b) En déduire que M appartient au plan (ABC).
  - c) Démontrer que  $P(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{OM^2}{870} - \frac{3}{87}$ .
  - d) Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Déterminer les coordonnées de H.
  - e) En déduire les valeurs de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  qui rendent minimale  $P(\alpha, \beta, \gamma)$ , puis calculer la probabilité  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  correspondante.
- 3) Le sac contient désormais 10 boules noires, 10 boules blanches et 10 boules rouges. Soient n et k deux entiers naturels supérieur ou égal à 2. Un Joueur mise n FCFA et tire deux boules du sac.
  - ✓ S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois sa mise et le jeu est terminé
  - ✓ S'il obtient deux boules de couleurs différentes, il remet les deux boules tirées dans le sac et tire à nouveau simultanément deux boules.
  - ✓ S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit (k - 1) fois sa mise, sinon il perd sa mise et le jeu est terminé. Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
    - a) Montrer que la probabilité pour que le joueur ait un gain algébrique égal à  $n(k - 1)$  est  $\frac{9}{29}$ .
    - b) Déterminer la loi de probabilité de X.
    - c) Calculer l'espérance mathématique E(X) en fonction de k et n.