République du Sénégal
Ministère de l'Education Nationale,
INSPECTION D'ACADÉMIE DE PIKINE-GUÉDIAWAYE
LYCÉE DE PIKINE

Mathématiques

Année Scolaire : 2023−2024
Niveau : T^le^S2

Équations Différentielles

✍ Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, trouve la solution f de l'équation différentielle satisfaisant à la condition indiquée.

1. $3y' + 7y = 0; \qquad f(2) = 5.$
2. $y' - 2y = 0; \qquad f(0) = 1.$
3. $2y - 5y' = 0; \qquad f(1) = -3.$
4. $2y'' - 3y' - 2y = 0; f(0) = 2$ et $f'(0) = -3.$
5. $4y'' - 4y' + y = 0; f(0) = -3$ et $f'(0) = 2.$
6. $9y'' + 6y' + y = 0; f(0) = 1$ et $f'(0) = 2.$
7. $y'' - 4y' + 5y = 0; f(0) = -1$ et $f'(0) = 3.$

✍ Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$y' + 2y = e^{-2x} \tag{1}$$

1. Vérifier que la fonction $x \longmapsto (x+1)e^{-2x}$ est solution de (1).
2. Démontrer qu'une fonction $f+g$ est solution de (1) si et seulement si la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'+2y = 0$.
3. En déduire les solutions de (1).

✍ Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$y" + 2y' + y = -2e^{-x} \tag{2}$$

1. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = -x^2e^{-x}$ est une solution de (2).
2. Résoudre l'équation différentielle $y" + 2y' + y = 0$.
3. En déduire les solution de (2).

✍ Exercice 4

Soit l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + 2y = 2 - 4x + 2x^2 \tag{3}$$

1. Trouver une fonction g polynôme du second degré solution de (3).
2. Montrer qu'une fonction h est solution de (3) si et seulement si $h - g$ est solution de l'équation
$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{4}$$
3. En déduire les solutions de (3).
4. Trouver la solution f de (3) dont la courbe représentative passe par l'origine du repère et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x$.
5. Déterminer une primitive de f en utilisant (3).

✍ Exercice 5

On considère l'équation différentielle

$$y" - 2y' + 2y = e^{-x}\sin(x) \tag{5}$$

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction $g : x \mapsto (a\cos(x)+b\sin(x))e^{-x}$ soit une solution de (5).
2. Montrer qu'une fonction f est solution de (5) si et seulement si $f - h$ est solution de l'équation
$$y'' - 2y' + 2y = 0 \tag{6}$$
3. Résoudre (6) puis en déduire les solutions de (5).
4. Déterminer la solution ϕ de (5) dont la représentation graphique passe par O et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$.

✍ Exercice 6

Soit α un nombre réel tel que $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.
Résoudre l'équation différentielle

$$(1 + \cos(2\alpha))y" - 2\sin(2\alpha)y' + 2y = 0.$$

✍ Exercice 7

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y" + 16y = 0 \tag{7}$$
2. Déterminer la solution f vérifiant $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$ et $f'(\pi) = 8$.
3. Résoudre dans $[0;\pi]$ l'équation $f(x) = \sqrt{2}$.