Enseignant : **Beh Yacouba Coulibaly** Durée : **2 h 00 min** Date : **16 Juillet 2024**

CONTRÔLE DE CONNAISSANCE N°1 ($T^{le}C$)

Pour cette évaluation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements prendront une part prépondérante dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère un triangle rectangle ABC rectangle en A tel que $BC = 2a$.

Soit l'application $f : M \longmapsto \overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + m\overrightarrow{MC}, m \in \mathbb{R}$.

1. Détermine m pour que $\overrightarrow{f(M)}$ soit un vecteur constant $\overrightarrow{v_0}$ et exprime $\overrightarrow{v_0}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. On prend $m = -1$ et on note I le milieu de $[BC]$.

Démontre que le barycentre G du système $\{(A, 4); (B, -1); (C, -1)\}$ est le symétrique de I par rapport à A.

3. Détermine l'ensemble : $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / 4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2\}$.

EXERCICE 2 (5 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a. Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$.

1. Prouve que $B \in (\Gamma)$.
2. On pose $G = \text{bar}\{(A, 1); (B, -4); (C, 1)\}$. Démontre que $GM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.
3. Détermine la nature de (Γ).
4. Trace (Γ)

EXERCICE 3 (10 points).

Dans cet exercice, les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

1. Justifie que $2 \times 35^{2002} - 3 \times 84^{2003} \equiv 5\ [17]$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère la division euclidienne de k par 6.
   a. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de 3^k par 7 ?
   b. Traduis par une égalité, la division euclidienne de 128 par 3 et celle de 64 par 7.
   c. Déduis des questions précédentes, le reste de la division euclidienne de 1998^{128} par 7.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a. Justifie que $7^{3n} \equiv 1\ [19]$.
   b. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de 7^n par 19 ?
   c. Démontre que si a, b et c sont trois entiers naturels consécutifs, alors $7^a + 7^b + 7^c$ est un multiple de 19.
4. Démontre par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, 11 divise $3^{n+3} - 4^{4n+2}$.