

Année scolaire : 2024 – 2025
 COMPOSITION DU TRIMESTRE 1
 Niveau : Terminale C



Durée : 3 h 00 min
 C.E. : Mathématiques – Info

MATHÉMATIQUES

Cette épreuve comporte quatre pages respectivement numérotées $1/4$, $2/4$, $3/4$ et $4/4$.

EXERCICE 1 (2 points)

Fais correspondre chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous à sa réponse juste. **Exemple : 1 – D**

N°	Affirmations	Réponses	
		A	B
1.	La dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3 - 4\cos 2x$ est ...	A	$f'(x) = 4\sin 2x$
		B	$f'(x) = 8\sin 2x$
		C	$f'(x) = -8\sin 2x$
2.	Soit f la fonction définie sur $\left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ par $f(x) = 3 - 4\cos(2x)$. $(f^{-1})'(1) = \dots$	A	$\frac{\sqrt{3}}{12}$
		B	N'existe pas.
		C	-0,5
3.	Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -4\sin(x)\cos(x)$. La primitive F de f sur \mathbb{R} qui s'annule en $\frac{2\pi}{3}$ est ...	A	$F(x) = 2\cos^2(x) - 1$
		B	$F(x) = 2\sin^2(x) - \sqrt{3}$
		C	$F(x) = 2\cos(x) + 1$
4.	Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} . La fonction $g : x \mapsto f(\tan x)$ est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $g'(x) = \dots$	A	$(1 - \tan^2 x)f'(\tan x)$
		B	$(\cos^2 x)f'(\tan x)$
		C	$(1 + \tan^2 x)f'(\tan x)$

EXERCICE 2 (2 points)

Fais correspondre chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous à sa réponse juste. **Exemple : 1 – D**

N°	Affirmations	Réponses	
		A	B
1.	$\overline{1333}^4$ est l'écriture en base 4 du nombre ...	A	511
		B	127
		C	253
2.	Si on a : $\begin{cases} a \equiv 4 [5] \\ b \equiv 3 [5] \end{cases}$, alors le reste de la division euclidienne de $7a^2 - 4b^2 + 2ab$ par 5 est ...	A	1
		B	7
		C	0
3.	Le reste de la division euclidienne de -458 par 11 est ...	A	4
		B	18
		C	7
4.	Tout diviseur commun de $3n - 5$ et $4n$ ($n \in \mathbb{Z}$) divise ...	A	n
		B	5
		C	20

EXERCICE 3 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne : $A(2 ; -3 ; 4)$, $B(-3 ; 1 ; 2)$ et le vecteur $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

1. Donne une représentation paramétrique de la droite (\mathcal{D}) passant A et de vecteur directeur \vec{u} .
2. Soit (\mathcal{P}) le plan passant par B et orthogonal à (\mathcal{D}) .

Justifie qu'une équation de (\mathcal{P}) est : $-x + 2y + 3z - 11 = 0$.

3. Soit H le projeté orthogonal de A sur (\mathcal{P}) .

a. Justifie que $H\left(\frac{3}{2} ; -2 ; \frac{11}{2}\right)$.

b. Calcule la distance de A au plan (\mathcal{P}) .

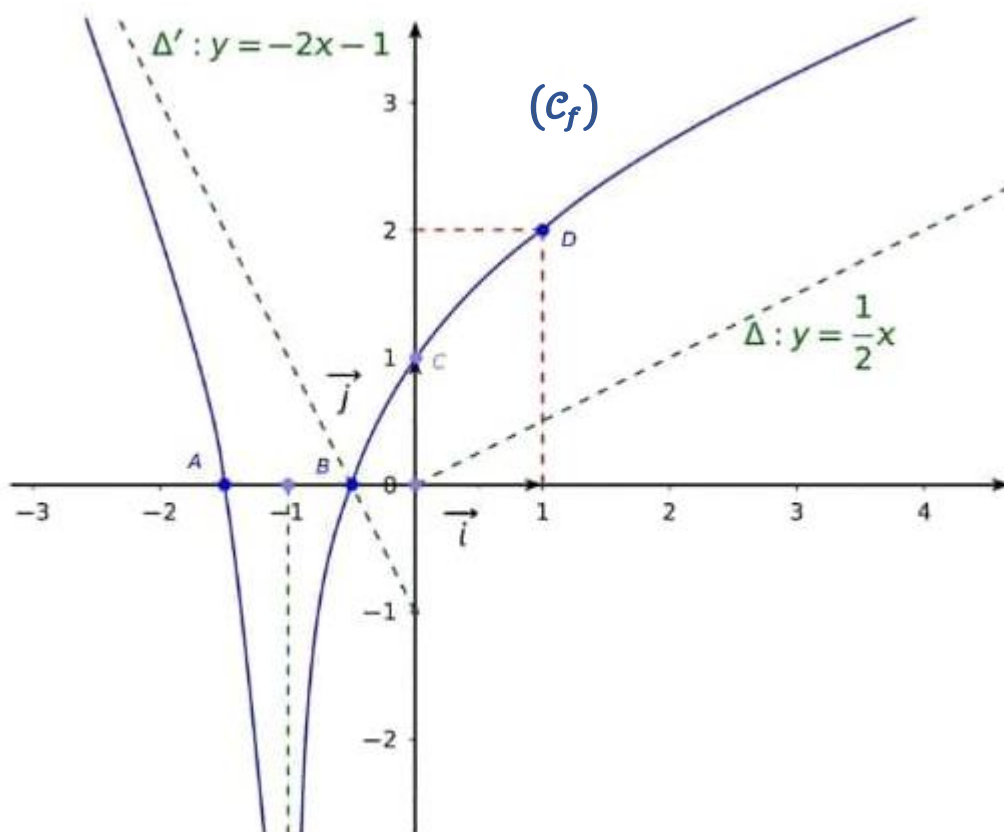
4. Quel est le projeté orthogonal de B sur (\mathcal{D}) ?

5. Calcule la distance de B à la droite (\mathcal{D}) .

EXERCICE 4 (9 points)

On a représenté ci-dessous, la courbe (\mathcal{C}_f) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- Les droites d'équations $x = -1$ et $y = -2x - 1$ sont des asymptotes à (\mathcal{C}_f) .
- (\mathcal{C}_f) admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$ au voisinage de $+\infty$.
- Les points $A\left(-\frac{3}{2} ; 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$, $C(0 ; 1)$ et $D(2 ; 1)$ sont des points de (\mathcal{C}_f) .



Partie A

- Par lecture graphique, détermine : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x$.
- Justifie que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(f(x)) - x = +\infty$.
- On rappelle que : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \sin^2 x \leq 1$.
 - Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $\frac{1-x}{f(x)} \leq \frac{f(\sin^2 x) - x}{f(x)} \leq \frac{2-x}{f(x)}$.
 - Calcule : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\sin^2 x) - x}{f(x)}$.
- Résous graphiquement dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, l'équation : $f(x) = 0$ puis déduis-en l'ensemble de définition $D_{\frac{1}{f}}$ de $\frac{1}{f}$.
- Démontre que la courbe $(C_{\frac{1}{f}})$ admet quatre asymptotes dont tu donneras les équations.

Partie B

- Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \sqrt{x^2 + 3} + x - 4$.
On désigne par (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - Démontre que :
 - La droite d'équation $y = -4$ est une asymptote à (C_g) en $-\infty$.
 - (C_g) admet en $+\infty$, une asymptote oblique dont préciseras l'équation.
 - Démontre que $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - La fonction $f \circ g$ est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Justifie ta réponse.
- Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = \begin{cases} (x+1)\sin\left(\frac{\pi}{x+1}\right) - 3 & \text{si } x \geq -1 \\ g(x) & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$.
On désigne par (C_h) la courbe représentative de h dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
 - Justifie que pour tout réel $x > -1$, on a : $-x - 4 \leq h(x) \leq x - 2$ puis déduis-en que h est continue en -1 .
 - Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ puis fais une interprétation graphique du résultat.
 - Justifie que l'équation $h(x) = -2$ admet une solution α dans $]0 ; 1[$.
 - Démontre que $\tan\left(\frac{\pi}{\alpha+1}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}}$.

EXERCICE 5 (4 points)

Bien qu'étant un professeur d'anglais, Sir Amara est un entrepreneur. Il lance sur le marché de nouvelles coques haut de gamme pour les téléphones mobiles. La production journalière de son entreprise est comprise entre 0 et 850 unités de coques.

- Le coût total, exprimé en milliers de francs par centaines d'unités produites, est donné par la fonction C définie sur $[0 ; 8,5]$ par $C(x) = 5x^3 - 7,5x^2 + 10x + 150$.
- La recette totale, exprimée en milliers de francs par centaines d'unités vendues, est donnée par la fonction R définie sur $[0 ; 8,5]$ par $R(x) = 310x$.

Pour plus d'efficacité, Sir Amara souhaite que son entreprise réalise un bénéfice maximal mais ne sait pas quelle quantité de coques elle doit fabriquer pour réaliser ce bénéfice maximal.

Il te sollicite à cet effet. Donne une solution argumentée aux préoccupations de Sir Amara tout en lui précisant ce bénéfice.

On rappelle que la fonction B définie sur $[0 ; 8,5]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$ est le bénéfice.

Le désespoir renonce mais l'espoir n'abandonne jamais.