DEVOIR RÉGIONAL 1ER TRIMESTRE **Durée : 4 heures**

NIVEAU : Tle C

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3 ,2/3 et 3/3.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 *(2 points)*

Ecris sur ta feuille de copie le numéro de chaque proposition suivie de **VRAI** si la proposition est vraie ou de **FAUX** si la proposition est fausse. *Aucune justification n'est demandée.*

N°	Propositions
1	Soit f une fonction continue et croissante sur l'intervalle $]a\,;b[$. Si f ne possède pas une limite finie à gauche de b, alors f n'est pas majorée sur l'intervalle $]a\,;b[$.
2	Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts. Pour tout point M du plan le vecteur : $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$ est indépendant du point M.
3	Soit f une fonction continue et décroissante sur $]-2\,;3[$ telle que $f(-2) = 2026$ et $f(3) = 2025$ alors l'équation $f(x) = 2024$ admet une solution unique dans $]-2\,;3[$.
4	Pour tous points distincts A et B et pour tout nombre réel k strictement positif, l'ensemble des points du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est un cercle.

EXERCICE 2 *(2 points)*

Pour chacune des affirmations du tableau suivant, les informations des lignes A, B et C permettent d'obtenir trois réponses dont une seule est juste.
Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponse	
1	ABC est un triangle et G est son centre de gravité. L'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$ est ...	A	l'ensemble vide $\emptyset$
		B	le singleton $\{G\}$
		C	un cercle de centre G
2	Soit n un nombre entier naturel. Si a divise $n+4$ et a divise $2n+13$ alors a divise ...	A	9
		B	6
		C	5
3	Si pour tout nombre réel $x \neq 1$, une fonction f est telle que $3 - \frac{5}{x^2+1} \leq f(x) \leq 5 + \frac{2x+3}{1-x}$ alors la limite de f en $+\infty$ est ..	A	3
		B	5
		C	$+\infty$
4	L'équation $\sqrt[5]{x^7} = 4$ admet pour solution dans $]0;+\infty[$ le nombre reel ...	A	$\sqrt[5]{4^7}$
		B	$\sqrt[7]{4^5}$
		C	$\sqrt[35]{4}$

EXERCICE 3 ***(3 points)***

1. a) Détermine suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.
   b) Démontre que pour tout entier naturel n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   c) Calcule le reste de la division euclidienne de 3^{2025} par 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.
   a) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a : $2U_n = 3^n - 1$.
   b) Montre que : $2U_n \equiv 0[7]$ si et seulement si $U_n \equiv 0[7]$.
   c) Déduis-en les valeurs de n pour lesquelles U_n est divisible par 7.

EXERCICE 4 ***(3,75 points)***

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 4a$ et $BC = 2a$ où a est un nombre réel strictement positif. Soit I le milieu du segement $[BC]$ et G_λ le barycentre des points pondérés (A, λ), $(B, 1)$ et $(C, 1)$ où λ est un nombre réel différent de -2.

1. a) Démontre que $\overrightarrow{IG_\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda+2}\overrightarrow{IA}$.
   b) Soit f la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x+2}$.
   On admet que f est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$.
   i) Détermine $f(]-2; +\infty[)$.
   ii) Déduis-en l'ensemble (D) des barycentres G_λ lorsque λ décrit l'intervalle $]-2; +\infty[$.

Pour la suite de l'exercice on prendra : $\lambda = -1$.

2. On note G le barycentre des points pondérés $(A, -1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.
   a) Fais une figure en construisant le point G.
   b) Justifie que le quadrilatère $ABGC$ est un losange.
3. On note (Γ) l'ensemble des points du plan tels que : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -12a^2$.
   a) Démontre que : $GA^2 = 60a^2$.
   b) Détermine et construis (Γ).
4. Soit (L) l'ensemble des points M du plan tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 32a^2$.
   a) Démontre que : $M \in (L) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{IA} = 0$.
   b) Détermine et construis (L).

EXERCICE 5 ***(4,25 points)***

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{14}{3} & si\ x \in]-\infty; 2] \\ f(x) = \frac{\sqrt{1+4x} - x^2 + 1}{x-2} & si\ x \in]2; +\infty[\end{cases}$

(Cf) désigne sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O\ ,\ I\ ,\ J)$ d'unité 1 cm.

1. a) Calcule la limite de f en 2 à droite.
   b) Justifie que f est continue en 2.
2. a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x - 2$ est une asymptote oblique à (Cf) en $+\infty$.
3. *On admet que* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
   a) Calcule $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 2]$.
   b) Etudie le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty; 2]$ et dresse le tableau de variation de f sur $]-\infty; 2]$.
   c) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty; 2[$.
   d) Vérifie que $-1{,}73 < \alpha < -1{,}72$.
4. On admet que le tableau de variation de f sur IR est le suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{14}{3}$	↗	$-\frac{10}{3}$	↘	$-\infty$

a) En utilisant le tableau de variation et la limite de composée de fonctions, détermine $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} f\left(\frac{2x+5}{3-x}\right)$.

b) Trace (Cf) et (D) dans le même repère (O, I, J). *(On prendra $\alpha = -1{,}7$).*
On admettra que (Cf) est au-dessus de (D) sur $]2; +\infty[$.

<u>EXERCICE 6</u> ***(5 points)***

Une entreprise de vente de produits alimentaires, utilise d'une part des codes-barres pour d'une part identifier ses produits *(connaitre son origine, son emplacement, sa quantité disponible)* et d'autre part afficher le prix associé à ce produit. Ce code est une succession de 13 chiffres lus de la gauche vers la droite ; il est succédé de deux chiffres R et S à droite appelés « *clé du code* » qui servent à la vérification de la bonne saisie du code.

La construction des codes-barres utilisés par cette entreprise suit la formule suivante :

$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	$C5$	$C6$	$C7$	$C8$	$C9$	$C10$	$C11$	R	S

où les $C1$; $C2$; $C3$; $C4$; $C5$; $C6$; $C7$; $C8$; $C9$; $C10$; $C11$; R et S sont des entiers compris entre 0 et 9 ; la « *clé du code* » RS est calculée de telle sorte que le nombre obtenu par les codes-barres est divisible par 77.

Lors d'un contrôle de qualité, les agents ont observé une anomalie sur le code-barres d'un produit. Cette anomalie est traduite par l'absence de la « *clé du code* » RS de ce produit schématisé par des pointillés à droites *(voir figure ci-dessous).*

Informé le directeur de cette entreprise souhaite reconstituer le code-barres de ce produit en déterminant la « *clé du code* » RS mais il ne dispose d'aucune compétence et de personnel qualifié pour le faire. Pour cela il sollicite ton aide.

En utilisant tes connaissances mathématiques de Terminale C, aide le directeur à reconstituer le code-barres de ce produit en déterminant la « *clé du code* » RS.