Collège Jean TABI d'Etoudi
Département de maths
BP 4174-Yaoundé
Tél/Fax : 222.21.60.53
N/Réf : CJT/24-25/DH/HVN/CSM

Année scolaire 2024-2025
Période n°6
Classe : Tle C
Durée : 4H
Coef. : 7

DEVOIR HARMONISE DE MATHEMATIQUES DU 08/05/2025

Partie A : EVALUATION DES RESSOURCES (15 points)

Exercice 1 : (5 points)

On admet que si une suite (α_n) a pour limite l, alors la suite (α_{2n}) a aussi pour limite l.

1. Soit (v_n) la suite définie par: $v_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt$.
   a) Montrer que (v_n) est décroissante et positive. (0,5 pt)
   b) En intégrant par parties, prouvez que $(\mathbf{E})$: $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} v_n$. (0,5 pt)
   c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$ puis, calculer la limite de la suite $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$. (0,5 pt)
   d) Démontrer que la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par $a_n = (n+1)v_{n+1}v_n$ est constante, puis, déterminer cette constante. (0,5 pt)
   e) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, n{v_n}^2 = \frac{n}{n+1} a_n \frac{v_n}{v_{n+1}}$ et en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} n{v_n}^2 = \frac{\pi}{2}$. (0,5 pt)
2. Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = v_{2n}$.
   a) Quelle est la limite de la suite $\left(n{b_n}^2\right)$? (0,25 pt)
   b) En utilisant la relation $(\mathbf{E})$, démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$. (0,75 pt)
3. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $u_n = ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) ln(n)$.
   On admet que (u_n) est convergente
   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^{u_n} = n!\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. (0,5 pt)
   b) Déterminer une constante A telle que pour tout entier naturel n non nul on ait : $e^{u_{2n}-2u_n} = A\sqrt{n{b_n}^2}$; En déduire la limite de (u_n). (1 pt)

Exercice 2 : (5 points)

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des points de $\mathcal{P}$ dont l'affixe z vérifie la relation : $wz^2 + \overline{wz^2} - \frac{10}{3}z\bar{z} + 192 = 0$

et f l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même associant à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}w^2 z$ avec $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1. On suppose $n = 5$
   a. Montrer que $1 + w + w^2 + \cdots + w^4 = 0$. (0,5 pt)
   b. En déduire que : $1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0$. (0,5 pt)
   c. Montrer que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 4cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 2$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. (1 pt)
   d. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. (0,5 pt)

2. On suppose $n = 3$
   a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f. (0,5 pt)
   b. Montrer que : $M'(z') \in f(\mathcal{E})$ si et seulement si $3z'^2 + 3\overline{z'^2} - 10z'\overline{z'} + 64 = 0$. (0,5 pt)
   En déduire alors que : $x^2 + 4y^2 = 16$ est une équation cartésienne de $f(\mathcal{E})$. (0,5 pt)
   c. Montrer que $\mathcal{E}$ est une conique dont on précisera les sommets, les foyers, les directrices et l'excentricité. (1 pt)

Exercice 3 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthogonal d'origine O.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $48x + 35y = 1$. (0,75 pt)
2. On considère le vecteur $\vec{u}(48; 35; 24)$ et le point $\mathrm{A}(-11; 35; -13)$.
   a) Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points $\mathrm{M}(x; y; z)$ tels que : $\vec{u}.\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$. (0,75 pt)
   b) Soit (D) la droite d'intersection de (Π) avec le plan d'équation $z = 16$.
   Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle $[-100; 100]$. (1,5 pt)
3. On considère le plan (P) d'équation : $48x + 35y + 24z - 385 = 0$.
   a) Ecrire une équation de la sphère S de centre O et tangent à (P). (0,5 pt)
   b) Déterminer l'expression analytique de la réflexion f par rapport au plan (P). (1,5 pt)

<u>Partie B</u> : EVALUATION DES COMPETENCES (5points)

<u>Situation</u> :

Dans une localité du Cameroun, la population est victime d'une pandémie causée par une bactérie. Une étude faite par des scientifiques démontre que le nombre (en centaines) M de malades, t jours après que la maladie ait été déclarée est $\mathrm{M}(t) = te^{-\frac{1}{2}t+3}$. La pandémie sera déclarée sous contrôle lorsque le nombre de malades au quotidien sera inférieur à 10.

Pour faire face à cette maladie, les autorités ont mis sur pieds, une équipe de microbiologistes chargés d'étudier le comportement de cette bactérie. A cet effet, Ils ont réalisé des cultures dans un milieu clos, en y introduisant un nombre N_0 de bactéries à un instant initial $t = 0$.
Le nombre $\mathrm{N}(t)$ (en million(s)) de bactéries présentes dans une culture, t heure(s) après son début est telle que : $\left(\frac{1}{\mathrm{N}(t)}\right)' = 1 - \frac{1}{\mathrm{N}(t)}$. Ces scientifiques préconisent de vacciner les populations de cette localité dans le cas où le nombre de bactéries triples en moins de 2 heures.

<u>Tâches</u> :

1. Après combien de jours cette pandémie sera-t-elle sous contrôle ? (1,5 pt)
2. Déterminer le nombre moyen de personnes malades quotidiennement au cours de la première semaine de la pandémie. (1,5 pt)
3. Les habitants de cette localité devraient-elles être vaccinés ? (1,5 pt)

Présentation : 0,5 pt