REPUBLIQUE GABONAISE

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Devoir commun de Mathématiques inter - provincial

Série C

Coefficient : 5

Durée : 4 heures

Date : Le 26 Mai 2025

Etablissements concernés :

Libreville, Estuaire : Lycée Public BA OUMAR
Lastoursville, Ogooué – Lolo : Lycée Public Jean Arsène BOUNGUENDZA

Chargés de cours :

Monsieur, Touny Axel MOUEDJI IKAGNA
Monsieur, JURIN. S . NZONDO KOUCOÏ

Consignes générales :

Les calculatrices programmables ne sont pas autorisées
Le sujet comporte 5 pages (page de garde y compris)
Ce sujet est noté sur 180

Exercice 1 : QCM et ROC (12 points)

Partie A : QCM (6 points)

Cette partie est un questionnaire à choix multiples (QCM). Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, quatre réponses sont proposées, une seule d'entre elles est exacte. Chaque réponse donne un point, une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlève aucun point. Pour chacune des 3 questions, indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la lettre de la réponse exacte.

1°) PQRS est un carré de centre O tel que le triplet $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R})$ soit de sens direct. I et J sont les milieux respectifs des segments $[\mathrm{QR}]$ et $[\mathrm{RS}]$. La composée $r\left(\mathrm{O}; \frac{\pi}{2}\right) \circ \mathrm{S}_{(\mathrm{QR})}$ est la symétrie glissée d'axe (IJ) et de vecteur :

Réponse A : $\overrightarrow{\mathrm{QS}}$
Réponse B : $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$
Réponse C : $\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$
Réponse D : $\overrightarrow{\mathrm{QO}}$

2°) ABC est un triangle et G l'isobarycentre des points A, B et C. L'ensemble des points M Du plan vérifiant : $\|\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\| = \mathrm{AC}$ est :

Réponse A : La droite passant par A et perpendiculaire à la droite (AC)
Réponse B : Le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{3}$ AC
Réponse C : L'ensemble vide
Réponse D : le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3}$ AC

3°) On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 8e^{x}$. Laquelle des fonctions suivantes est solution de l'équation différentielle (E) et vérifiant les conditions $y(0) = 2$ et $y'(\pi) = 0$

Réponse A : $y(x) = e^{2x} + \cos(2x) + e^{-2\pi}\sin(2x)$

Réponse B : $y(x) = e^{-2x} + \cos(2x) + e^{2\pi}\sin(2x)$

Réponse C : $y(x) = e^{2x} + \cos(2x) + e^{2\pi}\sin(2x)$

Réponse D : Aucune réponse proposée n'est correcte

Partie B : ROC (6 points)

1°) A, B et C sont trois points non alignés de l'espace.

Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}\|$ (en unité d'aire)

2°) Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I $(\mathrm{a} < \mathrm{b})$; Soit m et M deux réels tels que pour tout $x \in [\mathrm{a}\,;\mathrm{b}]$: $m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$

Démontrer que : $m(b-a) \leq \int_{a}^{\mathrm{b}} f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$

Exercice 2 : Arithmétiques - Probabilité conditionnelle et suite géométrique (42 points)

Partie A : Arithmétique (22 points)

1°) Démontrer qu'il existe un couple $(a\,;b)$ d'entier relatifs tels que : $45a - 16b = 1$.

2°) Soit l'équation $(E) : 45x - 16y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Justifier que le couple $(10\,;28)$ est une solution particulière de (E).

b) Résoudre alors l'équation (E).

3°) Deux navires A et B accostent régulièrement et périodiquement dans un port pour décharger et charger des marchandises.

Le navire A accoste tous les 90 jours et B accoste tous les 32 jours.

Le navire A accoste un jour J_0 au port et quatre jours plus tard, B accoste au port à son tour. On note J_1 le jour de la prochaine entrée simultanée des deux navires au port.

a) Soit u et v le nombre d'entrée au port effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1 (J_0 non compris). Démontrer que le couple $(u\,;v)$ est une solution de (E).

b) Déterminer le couple $(u\,;v)$

c) Calculer le nombre de jours qui s'écoulent entre J_0 et J_1 (J_0 non compris).

Partie B : Probabilité conditionnelle et suite géométrique (20 points)

Un employé se rend à son travail en bus. S'il est à l'heure à l'arrêt, il prend le bus de ramassage gratuit mis à sa disposition par l'entreprise. S'il est en retard, il prend le bus de ville.
On suppose que l'employé n'est pas en retard le premier jour. A partir du deuxième jour :

- Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{5}$
- S'il est en retard un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est de $\frac{1}{20}$

Pour tout entier naturel n supérieur à 2 : On appelle R_n, l'évènement : « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n la probabilité de R_n et q_n celle de $\overline{R_n}$, l'évènement contraire de R_n.

On suppose que : $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{1}{5}$. On a : $p_{R_n}(R_{n+1}) = \frac{1}{20}$ et $p_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = \frac{1}{5}$

1°) a) Justifier que : $p(R_n \cap R_{n+1}) = \frac{1}{20} \times p_n$ et $p(\overline{R_n} \cap R_{n+1}) = \frac{1}{5} \times q_n$ $\quad (pour\ \ n \geq 2)$

b) Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n et q_n

c) Déduise en que : $p_{n+1} = \frac{1}{5} - \frac{3}{20} \times p_n$

2°) On pose : $v_n = p_n - \frac{4}{20}$

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont – on déterminera la raison et le premier terme v_2

b) Calculer la limite de la suite (v_n), puis en déduire celle de (p_n)

Exercice 3 : Isométries et similitudes planes (42 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que : $mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$

1°) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui transforme A en C et B en D. Puis caractériser f

b) Soit g l'antidéplacement qui transforme A en C et B en D
Déterminer $(g \circ f)(\mathrm{C})$ et $(g \circ f)(\mathrm{D})$, puis caractériser $g \circ f$

c) En déduire la forme réduite de g

2°) Soit S la similitude plane directe qui transforme A en B et D en I

a) Déterminer le rapport et l'angle de S. Construire le centre Ω de S

b) Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par S, puis déduire que le triangle $O\Omega\mathrm{C}$ est rectangle

c) Déterminer l'image du carré ABCD par S

d) Montrer que les points A, Ω et J sont alignés

Exercice 4 : Applications affines et coniques (42 points)

$(\mathcal{P})$ est un plan rapporté à un repère $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\mathrm{I}}\,;\,\vec{\mathrm{J}})$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et considérons l'application affine :

$f_a : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

M $\mapsto$ $f_a(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$ telle que : $\begin{cases} x' = ax + a - 1 \\ y' = (3a-1)x + (1-2a)y + 2 \end{cases}$

1°) a) Montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle f_a est une homothétie. On notera a_0 cette valeur

b) Déterminer les éléments caractéristiques de f_{a_0}

2°) a) Déterminer une valeur de a pour laquelle f_a est involutive. On notera a_1 cette valeur
Indication : Une application f est involutive si : $f \circ f = Id$

b) Montrer que f_{a_1} est une symétrie que l'on précisera

3°) Déterminer $f_a(\mathcal{P})$ en fonction de a

4°) On pose : $a = 0$ et soit $\mathrm{t}_{\vec{\mathrm{u}}}$ tel que $\vec{\mathrm{u}} = 3\vec{\mathrm{J}}$

a) Déterminer l'écriture complexe de $\mathrm{t}_{\vec{\mathrm{u}}}$, puis l'expression analytique de $\mathrm{t}_{\vec{\mathrm{u}}}$

b) Montrer qu'il existe une application affine g de $(\mathcal{P})$ dans $(\mathcal{P})$ telle que : $f_0 = \mathrm{t}_{\vec{\mathrm{u}}} \circ g = g \circ \mathrm{t}_{\vec{\mathrm{u}}}$

5°) On désigne par $(\mathcal{C}_m)$ la courbe d'équation : $y^2 = mx^2 - (m-1)x - 3(2m+1)$ avec $m \in \mathbb{R}^*$

a) Montrer que $(\mathcal{C}_m)$ est une conique à centre $\mathrm{I}_m\left(\frac{m-1}{2m}\,;0\right)$

b) Préciser suivant les valeurs de m, si $(\mathcal{C}_m)$ est une ellipse ou une hyperbole.

Exercice 5 : Fonction définie par une intégrale (42 points)

1°) Soit la fonction numérique f définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\mathrm{I}}\,;\,\vec{\mathrm{J}})$

a) Démontrer que : $\forall\, x \in [0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x+1} \leq f(x) \leq e^x - 1$. En déduire la limite de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. Que peut – on dire de $(\mathcal{C})$?

b) Démontrer que : $\forall\, x \in]-1\,;0]$, $\ln(1+x) \leq f(x) \leq e^x \ln(1+x)$. En déduire la limite de f en -1

c) Etudier le sens de variation de a fonction f sur $]-1\,;\,+\infty[$, puis dresser son tableau de variation

2°) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0

b) Démontrer que : $\forall\, t > -1$, $e^t - t - 1 \geq 0$

c) En déduire la position relative de $(\mathcal{C})$ par à (T), puis tracer $(\mathcal{C})$ et (T)

3°) Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

a) Etudier le sens de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$

Puis en déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \dfrac{e^n}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{e^{n+1}}{n+2}$

b) Montrer que l'équation $g(x) = \displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$ admet une unique solution α_n dans $[n\ ;\ n+1]$

c) Montrer que la suite $\left(\dfrac{\alpha_n}{n}\right)_{n>0}$ est une suite convergente dont on précisera la limite.