LYCÉE MODERNE DE BONOUA

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHÉMATIQUES N°4

2024 - 2025
10 / 01 / 2025

Fomesoutra.com ça soutra!

Classe : Terminale C — **Durée : 03 heures**

Exercice 1 (4 points)

Lis attentivement chacune des propositions ci-dessous puis écris sur ta feuille de copie le numéro de chaque proposition suivi de « VRAI » si la proposition est vraie ou « FAUX » si la proposition est fausse.

1. Les plans (P) et (P') d'équations respectives : $2x+y+2z-6=0$ et $2x-2y-z+7=0$ sont perpendiculaires.
2. $x^2-y^2=1$ est l'équation réduite d'une hyperbole.
3. La solution de l'inéquation $ln24+ln(3-x)<ln(x+1)+ln(25x-49)$ est $S_R=\left]\frac{11}{5};3\right[$.
4. La fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x)=\frac{8-2x}{\sqrt{x-2}}$ admet un prolongement par continuité en 4.

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des lignes du tableau, une seule affirmation est juste. Écris le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation juste.

N°	AFFIRMATIONS	REPONSES	
1	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f: x \mapsto x^2\sin(x^3+5)$ est :	A	$\frac{1}{3}\cos(x^3+5)$
		B	$-\frac{1}{3}\cos(x^3+5)$
		C	$\frac{1}{3}\cos(x^4+5)$
2	Pour tout entier naturel n, le nombre $3^{2n}-2^n$ est divisible par :	A	11
		B	5
		C	7
3	L'ensemble de validité E de l'équation : $ln(2x-3)=2ln(6-x)-lnx$ est :	A	$E=\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$
		B	$E=\left]\frac{3}{2};6\right[$
		C	$E=]-\infty;6[$
4	Une équation de la parabole (Γ) de foyer $F(3;2)$ et de directrice la droite (D) d'équation $x=1$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est :	A	$(x-2)^2=4(y-2)$
		B	$(y-2)^2=4(x-2)$
		C	$(y-2)^2=4(x-3)$

Exercice 3 (6 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère la courbe (H) d'équation :

$$9x^2+4y^2+18x+16y-29=0.$$

1. Détermine l'équation réduite de (H), puis précise sa nature.
2. On désigne par :
   - Ω le centre de (H) ;
   - A et A' les sommets de (H) avec l'ordonnée de A supérieure à celle de A' ;
   - F et F' les foyers de (H) avec l'ordonnée de F supérieure à celle de F'.

   a) Précise les coordonnées de Ω dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   b) Détermine les coordonnées de chacun des points A, A', F et F' dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3. On désigne par :
   - (D) et (D') les directrices de (H). (D) est la directrice associée au sommet A.
   - (Δ) et (Δ') les asymptotes de (H). Le coefficient directeur de (Δ) est positif.

   a) Détermine une équation cartésienne de chacune des droites (D), (D'), (Δ) et (Δ') dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, puis dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
4. Construis les directrices (D) et (D'), les asymptotes (Δ) et (Δ') et (H).

Exercice 4 (7 points)

Soit a et b deux nombres réels tels que $0<a<b$.

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Montre que f est dérivable sur son ensemble de définition et calcule $f'(x)$.
3. On pose $g(x)=a(bx+1)\ln(bx+1)-b(ax+1)\ln(ax+1)$.
   a) Calcule $g'(x)$ et détermine le signe de g sur son ensemble de définition.
   b) Déduis-en que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $\left]-\frac{1}{b};0\right[$ et sur $]0;+\infty[$.
4. Montre que : $ln\left(\frac{a}{b}+1\right).ln\left(\frac{b}{a}+1\right)<(ln2)^2$.
5. On pose $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln(2x+1)}$.
   a) Déduis à partir des questions précédentes, la dérivée et les variations de g sur D_g.
   b) Détermine les asymptotes à (C_g) et étudie la dérivabilité en $-\frac{1}{2}$.
6. Construis (C_g).

Exercice 5 (5 points)

À la veille des congés de Pâques, une kermesse a été organisée par le conseil scolaire d'un lycée de Bonoua.

Au cours de cette kermesse, les élèves de Terminale C ont été invités par leur professeur de Mathématiques à suivre la projection d'un film sur certaines découvertes spatiales.

Lors de cette projection, le technicien a incliné par mégarde le projecteur face au mur. En ce moment, les élèves constatent alors la présence de faisceaux lumineux.

En assimilant le mur au plan de projection muni d'un repère orthonormé (O,I,J), le professeur affirme que l'ensemble des faisceaux lumineux du projecteur détermine une réunion de courbes d'équation algébrique : $y^2-9=9x^2-18x^3$.

Ton voisin de classe dit que c'est « DOHI », cependant il décide de déterminer la nature et les éléments caractéristiques de cette réunion de courbes pour vérifier l'affirmation du professeur mais n'y arrive pas.

À l'aide de tes connaissances mathématiques, aide ton voisin.