

Année Scolaire

2023 -2024

Prof. : M. TEHUA

0546234613



TRAVAUX DIRIGES DE MATHEMATIQUES

THEME : Equation Différentielle

NIVEAU : Terminale C,D E ,& F

Prof:

Email:

Rappels du Cours

I)-Définition

On Appelle équation différentielle toute équation ayant pour inconnue une fonction et dans laquelle figure au moins une des dérivées successives de la fonctions inconnue.

II)- Ordre d'une équation différentielle

C'est le rang de la dérivée la plus élevé contenue dans cette équation

a. $2y'''' - y''' + 7y'' + y' + 2y = 0$ 4^{eme} Ordre

b. $y''' + 7y'' + y' + 2y = 0$ 3^{eme} Ordre

c. $7y'' + y' + 2y = 0$ 2^{eme} Ordre

d. $y' + 2y = 0$ 1^{er} Ordre

II-1)- équation différentielle du 1^{er} ordre

1)- Equation différentielle de 1^{er} ordre sans second nombre (homogène)

C'est toute équation de la forme

(*) $ay' + by = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$

i)- Résolution

1^{er} Méthode

(*) $ay' + by = 0$

$\Leftrightarrow ay' = -by$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{-b}{a}$

$\Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int -\frac{b}{a} dx$

$\Rightarrow \ln|y| + C_1 = -\frac{b}{a}x + C_2$

$$\Rightarrow \ln|y| = -\frac{b}{a}x + C_2 - C_1$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-\frac{b}{a}x + C_2 - C_1}$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{-\frac{b}{a}x} \times e^{C_2 - C_1}$$

$$\Rightarrow y = e^{-\frac{b}{a}x} \times e^{C_2 - C_1}$$

$$\Rightarrow y = e^{C_2 - C_1} \times e^{-\frac{b}{a}x} \quad \text{posons } k = \pm e^{C_2 - C_1}$$

$$\boxed{y = ke^{-\frac{b}{a}x}} \quad \forall k \in \mathbb{R}^*$$

2^{eme} Méthode

(*) $ay' \pm by = 0$

posons: $y = ke^{rx}$

$$\Rightarrow y' = kre^{rx}$$

$$akre^{rx} + bke^{rx} = 0$$

$$ke^{rx}(ar + b) = 0$$

$$ke^{rx} \neq 0 = ar + b$$

$$\Rightarrow r = -\frac{b}{a}$$

remplacons $r = -\frac{b}{a}$ dans $y = ke^{rx}$ on aura:

$$\boxed{y = ke^{-\frac{b}{a}x}} \quad \forall k \in \mathbb{R}^*$$

Avec $ar + b = 0$ est appelée équation caractéristique l'équation homogène (*)

ii) Solution particulière

Déterminer la solution particulière c'est préciser la Valeur de la constante k telle que la solution vérifie la condition initiale $y(x_0) = y_0$

2)-Equation différentielle du 1^{er} ordre avec second membre (non homogène)

C'est une équation dont le second membre n'est plus 0 mais une fonction de la variable réelle x

Exemple

- $y' - 4y = -3x + 1$
- $2y' + y = e^x$
- $-\frac{1}{2}y' + 6y = \cos 2x$
- $5y' - 3y = (x^2 - x + 1)e^{3x}$
- $y' = -6x^2$
- $y' = 1 + \tan^2 x$

II) Equation différentielle du second ordre

1)-Equation différentielle du 2^{eme} ordre sans second membre (équation-homogène)

C'est toute équation de la forme :

$$(*) \quad \boxed{ay'' + by' + cy = 0} \quad \forall a \in \mathbb{R}^*, (b, c) \in \mathbb{R}$$

i)-Résolution

On a : $ay'' + by' + cy = 0$

posons $y = e^{tx}$

$$y' = te^{tx}$$

$$y'' = t^2e^{tx}$$

$$\Leftrightarrow at^2e^{tx} + bte^{tx} + ce^{tx} = 0$$

$$\Rightarrow e^{tx}(at^2 + bt + c) = 0$$

$$\Rightarrow e^{tx} \neq 0 \quad \Leftrightarrow at^2 + bt + c = 0$$

avec $(at^2 + bt + c = 0)$ équation caractéristique de l'équation homogène (*)

En effet : $at^2 + bt + c = 0$

On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac$

- **1er cas: si $\Delta = 0$** , Alors il existe une racine double $t_0 = -\frac{b}{2a}$ Dans ce cas la solution de (*) est de la forme

$$\boxed{y(x) = (Ax + B)e^{t_0x}} \quad \forall (A, B) \in \mathbb{R}$$

- **2e cas: si $\Delta > 0$** , Alors il existe deux racines réelles distinct r_1 et r_2 tels que

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans ce cas, on a $y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x} \quad \forall(A, B) \in \mathbb{R}$

- **3e cas** : si $\Delta < 0$, Alors il existe deux racines complexes conjuguées r_1 et r_2 telles que $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$

On aura :

$$y(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

Où

$$y(x) = Ke^{\alpha x} \cos(\beta x + \omega) \quad \forall(A, B, K, \alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{R}$$

ii) Solution particulière

Il s'agit de déterminer les valeurs des constantes réelles lorsque la solution générale vérifie les conditions initiales

$$y(x_0) = y_0 \text{ et } y'(x_0) = z_0$$

2)- Equation différentielle du second degré avec second membre (équation non homogène)

Forme : $ay'' + by' + cy = f(x)$

Exemple

- $y'' + by' - 2y = 4e^{2x}$
- $y'' - 4y' = 4(x - 1)^2 - 2$

Pour résoudre les équations de cette forme, il faut :

a) Cherche d'abord la solution homogène $y_h(x)$ associée à l'équation homogène en posant :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

b) Ensuite chercher la solution particulière $y_p(x)$ vérifiant (*) c'est à dire

$$ay''_p + by'_p + cy_p = f(x)$$

Ainsi, la solution générale de l'équation non homogène (*) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

EXERCICE 1

Résoudre les équations différentielles suivants :

a) $g''(x) = 1$

b) $y' = e^{2x}$

c) $xy' = \frac{1}{\ln x}$

d) $y'' = 2y'$

e) $y''' =$

f) $y' + 2y = 0$

g) $y' - \ln 2y = 0$

a') $y'' = \cos x$

b') $y'' = 2x$

c') $y'^{\sqrt{x}} = 1$

d') $(x^2 + 1)y' = x$

e') $y' = \frac{1}{x \ln x}$

f') $3y' - \pi y = 0$

g') $-2y' + 5y = 0$

EXERCICE 2

1) Résoudre dans \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

1- $2y'' - y' - 6y = 0$

2- $y'' + 16 = 0$

3- $y' - \pi y = 0$

4- $y' + y \ln 2 = 0$

5- $y'' - (\ln 2)^2 y =$

6- $y'' + y' + y = 0$

1') $y'' + y' + y = 0$

2') $4y'' - 25y = 0$

3') $(x^2 + 1)y' = 0$

4') $y'' - 2y' - y = 0$

5') $4y'' + y = 0$

2) Trouver les solutions vérifiant les conditions initiales de 4,4',5 et 5'

$\rightarrow y(0) = -1$ *et* $y'(0) = 0$

$\rightarrow y(0) = 1$ *et* $y'(2) = 1$

$\rightarrow y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ *et* $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\rightarrow y(0) = -1$ *et* $y'(0) = \sqrt{3}$

EXERCICE 3

1)- Déterminer toutes les solutions des fonctions réelles vérifiant l'équation différentielle donné dans chacun des cas suivants

a) $4y'' - 9y = 0$

b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

c) $4y'' - 8y' + 3y = 0$

a') $4y'' + 9y = 0$

b') $y'' - 4y' + 3y = 0$

c') $y'' + 5y' = 0$

d) $y'' - 6y' + 10y = 0$

d') $4y'' - 4y' + 5y = 0$

EXERCICE 4

Donner la solution générale de l'équation différentielles :

1) $y' + 4y = 0$

2) $3y' - y = 0$

3) $y' - 5y = 3x$

4) $\pi y' + 2y = 0$; $y(3\pi) = 1$

5) $4y'' + 9y = 0$; $y(\pi) = 2$; $y'(\pi) = 0$

6) $y'' = \frac{1}{2}x + 1 + \sin 2x$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$

7) $2y'' + y' - 3y = 0$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 2$

8) $y'' - 2y' + 2y = 0$

9) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$

10) $4y'' - 4y' - 3e^{2x} + y = 0$

EXERCICE 5

On considère l'équation différentielle suivants :

(E): $2y' + y = x^2 + 2x - 2$

1)- Déterminer une fonction polynôme de degré 2 solution de l'équation.

2)- On pose $f=h-g$, montrons que f est solution de (E) pour que h soit la solution de l'équation (E') = $2y' + y = 0$

3)- Résoudre (E')

4)- Déduire la solution générale de (E)

EXERCICE 6

Résoudre l'équation : (E): $y'' + y = 0$, on notera f la solution de cette équation

2)- On considère (E') : $y'' + y = \cos 2x$

a)- Déterminer les réels a et b tel que la fonction définie par

$f(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$, soit solution de l'équation (E')

b)- Montrer que la fonction h telle que $h(x) = f(x) + f_0(x)$ est une solution de (E)

EXERCICE 7

(E): $y'' - 5y' + 6y = 3e^{4x}$

- 1)- Soit φ la solution définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = ke^{4x}$ avec $K \in \mathbb{R}$. Déterminer k pour que φ soit solution de (E).
- 2)- Montrons que f est solution de l'équation (E) pour que $f - \varphi$ soit solution de l'équation différentielle $(E') = y'' - 5y + 6y = 0$
- a)- Résoudre (E')
- b)- Dédire la solution de (E)
- 3)- Déterminer la solution particulière de (E)

EXERCICE 8

Soit l'équation différentielle $(E) = y' + 2y = x^2 + 1$.

- 1)- Résoudre l'équation différentielle $(F) = y' + 2y = 0$.
- 2)- Déterminer une fonction polynôme g du second degré, solution de (E).
- 3)- Démontrer que f est une solution de (E) si et seulement si $h = f - g$.
- 4)- En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

EXERCICE 9

Soit $(E) = y'' + 4y' = \sin 2x$.

- 1)- Résoudre l'équation différentielle $(F) : y'' + 4y' = 0$.
- 2)- On pose $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
Déterminer les réels C_1 et C_2 tels que g soit une solution de (E)
- 3)- Démontrer que la fonction f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (F)
- 4)- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E)

EXERCICE 10

On considère l'équation (E) tel que $y'' - 6y' + 9y = 0$

- 1)- Résoudre sur \mathbb{R} cette équation.
- 2)- Trouver la solution particulière de f .
- 3)- Etudier les variations de la fonction ainsi trouver ; pour $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$

EXERCICE 11

Soit $(E) : y'' + 2y' + 10y = 0$

- 1)- Résoudre dans \mathbb{R} .
- 2)- Déterminer la solution particulière f ; tel que $f(0) = 0, f'(\frac{\pi}{6}) = e^{-\frac{\pi}{6}}$
- 3)- Représenter graphiquement la fonction trouver.

EXERCICE 12

Soit (E) : $y'' - 4y' + 4y = 0$

- 1)- Résoudre l'équation (E).
- 2)- Déterminer les solutions de (E) dont la dérivée première s'annule en 0.
- 3)- Déterminer la solution de (E) dont la courbe représentative (C) de f munie d'un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) admet une tangente horizontale A (0 ;1).
- 4)- Calculer l'intégrale $Z = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x) e^{2x} dx$.

EXERCICE 13

Soit (E) l'équation tel que : $9y'' + ay' + 4y = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

- 1)- Pour quelle valeur de a l'équation (E) admet-elle une solution générale de la forme $y = e^{ax}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}$.
- 2)- On pose $a = 0$, Résoudre l'équation (E).
- 3)- Déterminer la solution particulière f de (E) dont la courbe représentative dans le repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) passe par le point $I(\frac{\pi}{2}, \sqrt{3})$ et admet en ce point une tangente de pente $-\frac{2}{3}$.

EXERCICE 14

Soit l'équation différentielle $ay'' + 2by' + 4y = 0$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}$

Sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$

- 1)- Calculer a et b .
- 2)- Résoudre cette équation.
- 3)- Résoudre l'équation pour $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

EXERCICE 15

Soit (E): $y'' - 3y' + 2y = 0$

- 1)- Résoudre l'équation (E)
- 2)- Trouver la solution particulière f de (E) dont la courbe (C) passe par le point $I(\ln 2; 0)$ et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -2x$

EXERCICE 16

Soit (E) = $y'' - 2y' + y = 0$

- 1)- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E)
- 2)- Déterminer la solution particulière h de cette équation dont la courbe (C) admet dans le repère (o, \vec{i}, \vec{j}) un point d'inflexion.

EXERCICE 17

PARTIE A

(E) : $y'' + 2y' + y = 0$

- 1)- Résoudre l'équation (E).
- 2)- Trouver la solution g de (E) telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$

PARTIE B

Soit $g(x) = xe^x - 1$ la fonction continue et dérivable sur $]0; +\infty[$

- 1)- Calculer la limite de g en $+\infty$.
- 2)- Calculer $g'(x)$, puis étudier les variations de g sur $]0; +\infty[$.
- 3)- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$, puis donner le signe de g sur $]0; +\infty[$.

PARTIE C

Soit $f(x) = (x - 1)e^x - x - 1$ la fonction continue et dérivable sur $]0; +\infty[$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) , unité graphique de 2cm.

- 1)- Calculer la limite de g en $+\infty$.
- 2)- Montrer que $f'(x) = g(x)$.
- 3)- Dresser le tableau de variation de f .
- 4)- Préciser les branches infinies de (C) à $+\infty$, puis tracer soigneusement la courbe (C).
- 5)- Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C) avec l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0, x = 1$.

EXERCICE 18

PARTIE A

$$(E) : y'' + 4y' + 4y = 0$$

- 1)- Intégrer l'équation (E).
- 2)- Déterminer la solution particulière h , vérifiant les relations $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$.

PARTIE B

On considère la fonction f de la variable réelle x tel que $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x) = (x + 1)e^{-2x} & , si x \leq 0 \\ f(x) = 1 + x + 2x \ln(x) & , si x > 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère, orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) unité graphique de 4 cm.

- 1)- Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.
- 2)- Etudier les branches infinies de (C).
- 3)- Etudier les variations de f .
- 4)- Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α de l'intervalle $]-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}[$
- 5)- Construire la courbe (C) représentative de f dans le repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j})
- 6)- Calculer l'air de la partie du plan délimitée par la courbe (c) avec l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$, $x = 0$
- 7)- On construit la fonction g définie $\forall x \in]-\infty, 0[$ par $g(x) = -f(x)$
 - a)- Dresser le tableau de variation de g sans étudier les variations
 - b)- Construire (c') la courbe représentative de g dans le même repère que (C)

BONUS

Résoudre dans \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

$$1) \quad 4y' + 3y = 0 \quad \frac{1}{5}y + \frac{1}{3}y' = 0$$

$$2) \quad y \ln 5 - y' = 0 \quad y\sqrt{3} = y'$$

$$3) \quad y' - 3y = 0 \quad \text{et} \quad y(0) = 2$$

$$4) \quad 3y' + y = 0 \quad \text{et} \quad y(1) = 0$$

$$5) \quad y' + y \ln 2 = 0 \quad \text{et} \quad y(1) = 1$$

$$6) \quad y' = y \quad \text{et} \quad y(1) = -1$$

$$7) \quad 2y' + 3y = 0 \quad \text{et} \quad A\binom{2}{1}$$

$$10) \quad -y' = y \quad \text{et} \quad A\binom{2}{3}$$

- 11) $y' - \pi y = 0$ $A(e^{2x})$
- 12) $y' = -\frac{y}{2}$; 13) $y' + 2y = 0$
- 14) $y'^{\sqrt{2}} - y\sqrt{3} = 0$
- 15) $y' + 3y = 0$ $y(0) = 1$
- 16) $y' - 3y = 0$ $y(1) = 1$
- 17) $4y' - 3y = 0$ $y(-4) = 1$
- 18) $y' + y \ln 2 = 0$ $y(1) = -2$
- a) $9y'' - 64y = 0$ $9y'' + 4y = 0$
- b) $y'' - 2y = 0$ $2y'' + y = 0$
- c) $2y'' - y = 0$ $y(0) =$ $y'(0) = 1$
- d) $9y'' + 4y = 0$ $y(\pi) =$ $g'(\pi) = 0$
- e) $y'' + y' - 6y = 0$ $y'' - 4y' + 8y = 0$
- f) $y'' + 4y' - 5y = 0$ $\frac{1}{3}y'' - 2y' + 9y = 0$
- g) $2y'' - 2\sqrt{2}y' + y = 0$ $9y'' + 6y' + y = 0$
- h) $y'' - 6y' + 2y = 0$ $4y'' + 4y' + y = 0$
- i) $y'' - 2y' - 2y = 0$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0$
- j) $y'' - 4y' + 4y = 0$ $y(0) = 0,$ $y'(0) = 0$
- k) $y'' + 4y' + 5y = 0$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0$
- l) $y'' + 2y' + y = 0$ $y(0) = 1,$ $y'(0) = 0$
- m) $y'' + 16y = 0$ $y(0) = 0$ $y'(0) = -1$
- n) $y'' - (\ln 2)^2 y = 0$ $y(0) = 1,$ $y'(2) = 1$
- o) $4y'' + y = 0$ $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1,$ $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$
- p) $y'' + 2y' - 3y = 0$ $y(0) = 3,$ $y'(0) = -1$
- q) $y'' + y' + y = 0$ $y(0) = -1,$ $y'(0) = \sqrt{3}$

Vérifier dans chaque cas que la fonction f solution de l'équation (E) sur l'intervalle k :

- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ (E): $2(y + y') = x^2$ $k = \mathbb{R}$
- $f(x) = (2x - 1)e^x$ (E): $y' - y = 2e^x$ $k = \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x + e^{2x}$ (E): $y'' + y' - 2y = 4e^{2x}$ $k = \mathbb{R}$
- $f(x) = \sqrt{2x}$ (E): $yy' = 1$ $k =]0, +\infty[$