Problème10

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = -x + \ln x$ (où ln désigne le logarithme népérien).

1. Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$.
2. Résoudre dans l'intervalle $]0;+\infty[$ l'inéquation $g(x) > 0$.

Partie II

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$.

On appelle G la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unités : 2cm).

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
2. Montrer que $f'(x) = g(x)$. Utiliser les résultats de la partie **I** pour établir le tableau de variation de *f*.
3. Calculer $f(e^{3/2})$. On fera apparaître le détail des calculs.
4. Soit A le point d'abscisse 1 de G. Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe G.
5. Tracer dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la tangente (T) ainsi que la partie de la courbe G relative à l'intervalle]0;6].
6. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$.

a. Montrer que F est une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$.

b. Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ par la courbe G, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. On en donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près.