



CORRECTION DES EXERCICES
SUR LIMITES ET CONTINUITÉ

I- LIMITES

1. À l'aide des limites de référence

Calculons les limites suivantes :

a- $\lim_{x \rightarrow 3} 4 = 4$; b- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 120 = 120$ [$\lim_{x \rightarrow a} c = \lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$]

c- $\lim_{x \rightarrow -1} x^8 = 1$ [$\lim_{x \rightarrow -1} x^8 = \lim_{x \rightarrow -1} (-1)^8 = 1$] ; d- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ [l'exposant de x est 4 qui est un nombre pair] ; e- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 = -\infty$ [l'exposant est un nombre impair] ;

f- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ [idem] ; g- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{25}} = 0$ [$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$] ;

h- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{14}} = +\infty$; i- $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = -\infty$ [l'exposant de $(x-5)$ est 1 impair]

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

j- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ [idem] ; k- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^7} = -\infty$ [idem] ; l- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^5} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

m- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin x} = 3$ [$\frac{3x}{\sin x} = 3 \left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \right)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $3 \times 1 = 3$]

n- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{3x} = 0$ [$\frac{1-\cos x}{3x} = \frac{1}{3} \times \frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{3} \times \frac{-(\cos x - 1)}{x} = \frac{-1}{3} \times \frac{(\cos x - 1)}{x}$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)}{x} = 0$, $\frac{-1}{3} \times 0 = 0$]

o- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = 1$ [$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$, $\frac{x \cos x}{\sin x} = \frac{x}{\tan x} = \frac{1}{\frac{\tan x}{x}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan x}{x}} = 1$] ; p- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$ [$\frac{\sin 3x}{2x}$, posons $t = 3x$, $x = \frac{t}{3}$ lorsque $x \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$, $\frac{\sin 3x}{2x} = \frac{\sin t}{\frac{2t}{3}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sin t}{t}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2} \times \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}$]

q- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3 - x + 1) = +\infty$ [$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^3 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^3 = +\infty$ monôme le plus haut degré] ;

r- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 + 9) = +\infty$ [$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5) = -4 \times (-\infty) = +\infty$]

s- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5 - 2x^3 + 1}{3x^2 - x + 1} = +\infty$ [$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{3} x^3 = +\infty$]

t- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = 2$ [$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2$].

2. Limite et opérations sur les fonctions

Calculons les limites suivantes :

$$\mathbf{a-} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2\sqrt{x}) = +\infty \quad [\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty]$$

$$\mathbf{b-} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 3x - 7) \left(\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^3 - 4} \right) = -\infty \quad [\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 3x - 7) = -\infty \quad \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^3 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1, -\infty \times 1 = -\infty].$$

3. Limite d'une fonction composée

Calculons les limites suivantes :

$$\mathbf{a-} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x^2}{x+1} \right) = \mathbf{1} \quad [\text{On pose : } u(x) = \frac{\pi x^2}{x+1}, \text{ tel que } \sin \frac{\pi x^2}{x+1} = \sin(u). \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow 1} u(x) = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\pi x^2}{x+1} \right) = \frac{\pi}{2}. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x^2}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \sin(u) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1]$$

$$\mathbf{b-} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \right) = \sqrt{2} \quad [\text{soit } f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \quad \text{et } g(x) = \sqrt{x}. \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2. \lim_{y \rightarrow 2} \sqrt{y} = \sqrt{2}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}} \right) = \sqrt{2}]$$

$$\mathbf{c-} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \mathbf{1} \quad [\text{On a : } x \sin \frac{1}{x} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}. \text{ On pose } X = \frac{1}{x}, \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty; X \rightarrow \\ 0. \text{ Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1]$$

4. Limites et inégalités

a- On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x + 1 - 3 \sin x$

Déterminons la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

La fonction f est définie sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq -3 \sin x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 - 3 \leq 2x + 1 - 3 \sin x \leq 2x + 1 + 3$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$$

Limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$

Comme $2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 4 = -\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Comme $2x - 2 \leq f(x) \leq 2x + 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 4 = +\infty$, alors
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \cos x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \cos x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq x \cos x \leq x$$

$$\Leftrightarrow x \leq -x \cos x \leq -x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x \leq x^2 - x \cos x \leq x^2 - x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x \cos x) = +\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

c- Nous désirons calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$

- Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{x-1}{x} \leq \frac{x + \sin x}{x} \leq \frac{x+1}{x}$

$$\text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \leq \frac{x + \sin x}{x} \leq \frac{x+1}{x}$$

$$\text{D'où } \frac{x-1}{x} \leq \frac{x + \sin x}{x} \leq \frac{x+1}{x}$$

- Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

- Déduisons-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$

$$\text{On a : } \frac{x-1}{x} \leq \frac{x + \sin x}{x} \leq \frac{x+1}{x} \text{ et comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 1,$$

$$\text{Alors d'après la propriété de comparaison } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$$