BACCALAURÉAT
SESSION 2022

Durée: 4H
Coefficient: 4

MATHÉMATIQUES

SÉRIE D

Cette épreuve comporte 3 pages numérotées 1 sur 3, 2 sur 3, 3 sur 3 et une feuille annexe à rendre avec la copie. Chaque candidat recevra une (01) feuille de papier millimétré.
Seules les calculatrices scientifiques non graphiques sont autorisées.

EXERCICE 1 *(2 points)*

On donne les groupes de mots(la droite de regression, des primitives, une bijection, fonction dérivable, extremum relatif) et les phrases incomplètes dans le tableau ci-dessous:

N°	Phrases incomplètes
1.	Toute fonction f continue et strictement croissante sur un intervalle K définit.............de K sur $f(K)$.
2.	Soit (X,Y) une série statistique double ayant une forte corrélation entre X et Y, telle que: $V(X) \neq 0$. Une équation de...................de Y en X est $y = ax + b$ où $a = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$. $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ étant les moyennes respectives de X et Y.
3.	Toute fonction continue sur un intervalle I admet........................sur I.
4.	Toute.................................en un point a est continue en a.

Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de chaque phrase incomplète suivi du groupe de mots à écrire à la place des pointillés pour que la phrase soit vraie.

1 une bijection 2 la droite de regression
3 des primitives 4 fonction dérivable

EXERCICE 2 *(2 points)*

Pour chacun des énoncés du tableau ci-dessous, les informations des collonnes A, B et C permettent d'obtenir trois affirmations dont une seule est vraie.
Écris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Enoncés	A	B	C
1.	Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{-2x+5}$ est...	$x \mapsto -2e^{-2x+5}$	$x \mapsto \frac{1}{2}e^{-2x+5}$	$x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-2x+5}$
2.	Les solutions de l'équation différentielle $y'' - 4y = 0$ sont de la forme...	$x \mapsto ke^{2x} + k'e^{-2x}$ $(k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$	$x \to k\cos(2x) + k'\sin(2x)$ $(k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$	$x \mapsto ke^{4x} + k'e^{-4x}$ $(k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
3.	$\lim\limits_{x\to+\infty}(x - e^{x})$ est égale à...	$-\infty$	$+\infty$	0
4.	La forme exponentielle du nombre complexe $-1+i$ est...	$2e^{i\frac{\pi}{4}}$	$\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(-\frac{1}{2}e^{-2x+5}\right)' = -\frac{1}{2} \times (-2x+5)' \times e^{-2x+5}$

C

$= -\frac{1}{2} \times (-2)\, e^{-2x+5}$

$\left(-\frac{1}{2}e^{-2x+5}\right)' = e^{-2x+5}$

2) $y'' - 2^2 y = 0$, admet pour solutions sur

B $\mathbb{R}$, $y = k\cos 2x + k'\sin 2x$, $(k,k') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

3) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - e^{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{e^{x}}{x}\right)$

A

$= -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x} = +\infty$

4) On a : $-1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

B

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$

EXERCICE 3 *(3 points)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
A, B C, D et I sont les points du plan complexe d'affixes respectives: $-\sqrt{2}; 1+i; 1-i; 3+i$ et 1.

1. Justifie que le triangle ABC est isocèle en A.

2. Soit S la similitude directe du plan d'écriture complexe: $z' = (1+i)z + 1 - 3i$.

a) Justifie que: $S(D) = D$ et $S(B) = C$.

b) Détermine les éléments caractéristiques de S.

c) Détermine l'image (C') du cercle (C) de diamètre $[BD]$ par S.

1) $AB = |z_{\vec{AB}}| = |z_B - z_A| = |(1+i) - (-\sqrt{2})| = |1+\sqrt{2}+i| = 4+2\sqrt{2}$

$AC = |z_{\vec{AC}}| = |z_C - z_A| = |1-i-(-\sqrt{2})| = |1+\sqrt{2}-i| = 4+2\sqrt{2}$

$AB = AC$: Le triangle ABC st isocèle en A.

2) a) On a : $z' = (1+i)z + 1 - 3i$

donc : $z'_D = (1+i)z_D + 1 - 3i$

$= (1+i)(3+i) + 1 - 3i$

$= (3-1) + i(1+3) + 1 + i\times(-3)$

$= 3+i$

$z_{D'} = z_D$: $\boxed{S(D) = D.}$

$z'_B = (1+i)z_B + 1 - 3i$

$z_{B'} = (1+i)(1+i) + 1 - 3i$

$= (1-1) + i\times(1+1) + 1 - 3i$

$= 1 - i$

$= z_C$: $\boxed{S(B) = C}$

b) $S(D) = D$, alors D st le point invariant de S.

$k = |1+i|$; $\alpha = \text{Arg}(1+i)$

$k = \sqrt{2}$ $\qquad = \text{Arg}\left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

$= \frac{\pi}{4}$

$\boxed{S = S_{\left(D;\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)}}$

c) On a : $\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{S_{(D,\sqrt{2},\frac{\pi}{4})}} \\ \hline B & C \\ D & D \\ (C) & (C') \end{array}$, donc (C') est le cercle de diamètre $[CD]$

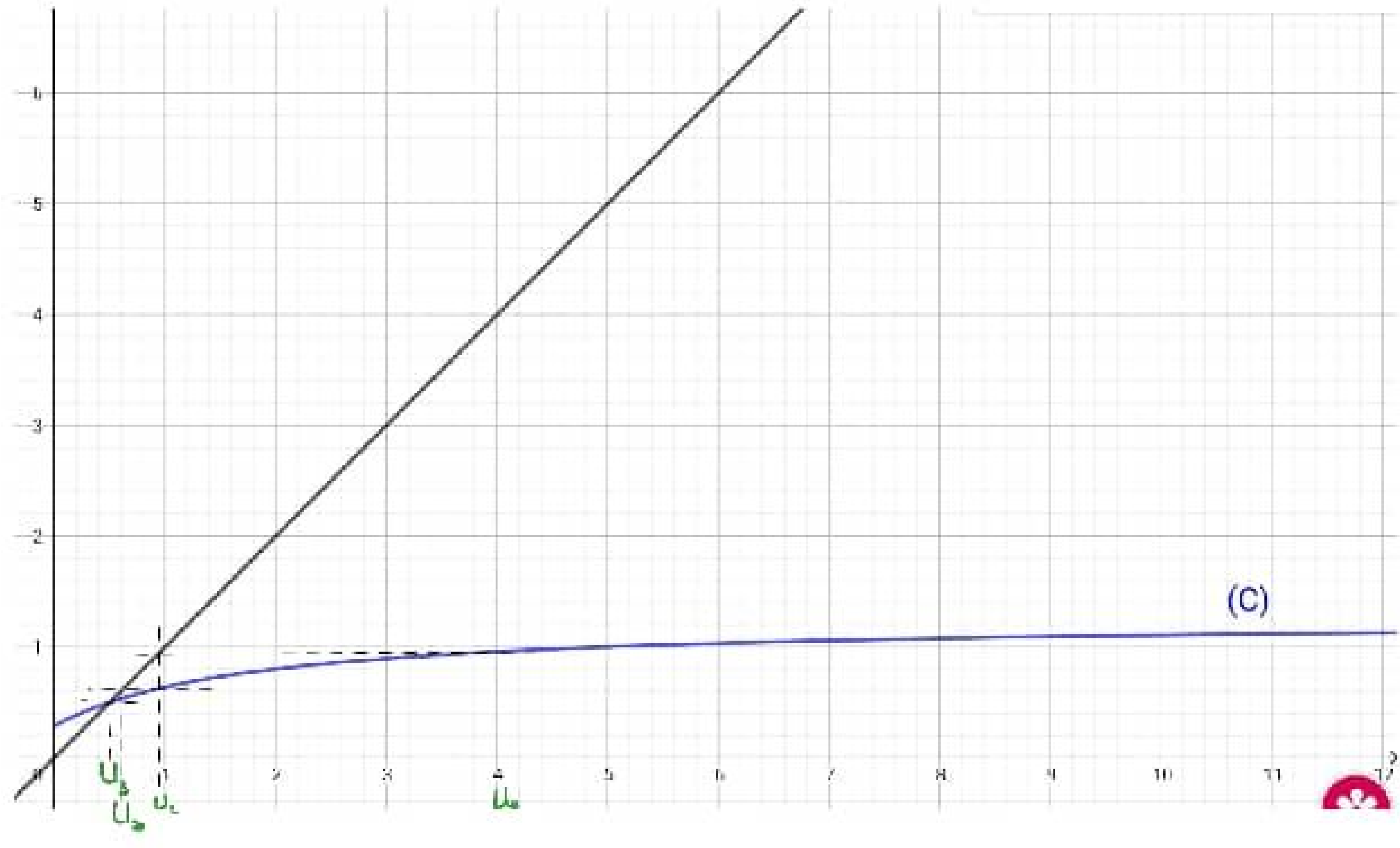
EXERCICE 4 *(4 points)*

On donne la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par: $f(x)=\dfrac{5x+2}{4x+7}$.

(C) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On considère la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Sur ta feuille annexe à rendre avec ta copie, construis à l'aide de (C) et de la droite (D) d'équation $y=x$ les quatre premiers termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
2. On admet que la fonction f est dérivable et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
   a) Démontre par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{2}$;
   b) Démontre que: $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(u_n+1)(-2u_n+1)}{4u_n+7}$;
   c) Déduis de 2.a) et 2.b) que la suite (u_n) est décroissante.
3. a) Déduis de 2.a) et 2.c) que la suite (u_n) est convergente.
   b) justifie que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.



EXERCICE 5 *(4 points)*

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par: $\begin{cases} f(x) = x\ln x - 2x, & si\, x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).

L'unité graphique est 2 cm.

1.a) Justifie que f est continue en 0.

b) Justifie que: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

c) Interprète graphiquement le résultat de 1.b).

2. On admet que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprète graphiquement ces résultats.

3.a) On suppose que f est dérivable sur $]0;+\infty[$

Justifie que: $\forall x \in]0;+\infty[, f'(x) = -1 + \ln x$

b) Etudie les variations de f .

c) Dresse le tableau de variation de f .

4. Trace la courbe (C_f).

(Tu pourras tracer l'axe de abscisses dans le sens de la longueur du papier millimétré).

5.a) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que l'intégrale K telle que

$K = \int x \ln x dx$ est égale à $2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

b) On admet que, sur $[1;2]$, (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses (OI).

Calcule l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C_f) la droite (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

1 a) Pour $x > 0$, $f(x) = x\ln x - 2x$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ Car $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$: f est Continue en 0.

b) Pour $x > 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x\ln x - 2x}{x}$

$= \frac{\cancel{x}(\ln x - 2)}{\cancel{x}}$

$= -2 + \ln x$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

c) On a: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$, alors (Cf) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

② On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

alors (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ)

③ a) Pour tout $x > 0$, $f'(x) = (x \ln x - 2x)'$

$$= (x)' \times \ln x + x \times (\ln x)' - 2$$

$$= \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2$$

$$f'(x) = -1 + \ln x$$

b) Pour $x > 0$, $f'(x) > 0$

$$-1 + \ln x > 0$$

$$\ln x > 1$$

$$\ln x > \ln e$$

$$x > e$$

f est strictement croissante sur $[e, +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]0, e]$

c)

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$	$+\infty$

④ Tracé de (C_f)

$$I = -K + \left[x^2\right]_1^2 \quad \text{et } \mu(a) = OI \times OJ$$
$$= 4\,cm^2$$
$$= \frac{3}{4} - 2\ln 2 + (2^2 - 1^2)$$
$$= \frac{3}{4} - 2\ln 2 + 3$$
$$= \frac{15}{4} - 2\ln 2 \quad \text{donc } \boxed{\mathcal{A} = (15 - 8\ln 2)\,cm^2}$$

EXERCICE 6 *(5 points)*

Lors de la kermess en fin d'année dans ton lycée, le comité d'organisation a initié un jeu d'adresse.
le jeu comprend quatre épreuves.
Le joueur reçoit 4 boules après une mise de 1.000 FCFA.
Une épreuve consiste à lancer une boule dans un trou situé à 10 m .
Le jeu est terminé lorsque le joueur a lancé les quatre boules.
On suppose que les 4 lancers sont indépendants.
À chaque épreuve :

- > si le joueur réussit à loger la boule dans le trou, le comité d'organisation lui remet 2 tickets;
- > s'il ne réussit pas à loger la boule dans letrou,il ne gagne aucun ticket.

On admet que le joueur a 25% de chance de loger une boule dans le trou.
Le comité d'organisation récompense à hauteur de 2.500 FCFA le joueur qui possède à la fin du jeu au moins 4 tickets.
Un élève affirme qu'un joueur a moins de 20% de chance de gagner les 2.500 FCFA.
A l'aide d'une production arumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si l'affirmation de cet élève est justifiée ou non.

Pour nous prononcer sur l'affirmation de l'élève, nous allons utiliser nos connaissances mathématiques en probabilité conditionnelle et variable aléatoire pour :

- définir une épreuve de Bernoulli ;
- préciser la variable aléatoire qui indique le nombre de succès de cette épreuve dans des répétions successives et indépendantes.

Le lancer d'une boule dans un trou situé à 10 m est une épreuve de Bernoulli qui conduit à deux résultats :

S : « le joueur réussit à loger la boule dans le trou » et $\overline{S}$.

On a : $p = p(S) = 25\%$

Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de succès dans les répétitions successives et indépendantes de 4 épreuves ;

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 25\%$. Soit l'évènement

G : « le joueur gagne 2500 FCFA »

alors $G = (X \geq 2)$ et $p(G) = p(X \geq 2)$

$= 1 - p(X \leq 1)$

$$p(G) = 1 - \left[C_4^0 \times \left(\frac{25}{100}\right)^0 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right)^4 + C_4^1 \left(\frac{25}{100}\right)^1 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right)^3\right]$$

$$p(G) = 1 - \left(\frac{75}{100}\right)^4 - 4 \times \frac{25}{100} \times \left(\frac{75}{100}\right)^3$$

$p(G) = \frac{67}{256}$; $p(G) \simeq 26{,}17\%$

$p(G) > 20\%$

L'affirmation de l'élève n'est pas juste.