Exercice 9

On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$. Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe $-i$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{C}-\{i\}$: $f(z) = \dfrac{1-iz}{z-i}$.

1- Vérifie que pour tout z de $\mathbb{C}-\{i\}$, $f(z) = -i + \dfrac{2}{z-i}$.

2- a) Vérifie que $-i$ n'a pas d'antécédent par f.
   b) Détermine les antécédents de 0 et de i par f.

3- A tout point M distinct de A d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z)$.
   a) Démontre que, pour tout point M distinct de A, on a : $AM \times BM' = 2$.
   b) Démontre que lorsque le point M décrit le cercle (C) de centre A et de rayon 4, le point M' parcourt un cercle (C') dont on précisera le centre et le rayon.

4- a) Détermine l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $z - i$ soit un nombre réel non nul.
   b) Démontre que, lorsque M décrit l'ensemble (E), le point M' parcourt une droite (Δ) que l'on précisera.
   c) Lorsque M décrit l'ensemble (E), le point M' décrit-il toute la droite (Δ) ?

5- Détermine l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur non nul.

Exercice 10

À l'occasion de la kermesse organisée dans un établissement secondaire pendant les fêtes de fin d'année scolaire, le Président du Conseil Scolaire de cet établissement est éligible à un prix de la tombola. Pour avoir son gain, il est invité à tirer au hasard et simultanément 3 boules d'un sac qui en contient 5 rouges et 3 blanches indiscernables au toucher. Chaque boule blanche rapporte 10 000 F et chaque boule rouge rapporte 5 000 F.

Avant le tirage, le Président du Conseil Scolaire déclare qu'il veut offrir, avec son gain, un stabilisateur de courant d'une valeur de 23 000 FCFA à son établissement pour sécuriser l'ordinateur de la bibliothèque. Certains élèves pensent que le Président du Conseil Scolaire a plus de 50% de chance de leur offrir ce stabilisateur.

Donne ton avis sur l'affirmation de ces élèves.

Exercice 11

Une pièce est usinée successivement par deux machines M_1 et M_2, les résultats des deux usinages étant indépendants. Après passage dans la première machine M_1, 5% des pièces présentent un défaut. On note A l'événement : « la pièce est défectueuse après passage dans M_1 » ; Après passage dans la deuxième machine M_2 (et quelque soit leur état après leur passage dans M_1), 20% présente un autre défaut. On note B l'évènement « la pièce est défectueuse après passage dans M_2. »

On extrait au hasard une pièce parmi les pièces ayant subi les deux usinages.

1. a) Détermine les probabilités de A et de B.

   b) Exprime à l'aide des évènements A et de B les évènements suivants :

   C : « la pièce est défectueuse pour les deux usinages par M_1 et M_2 »

   D : « la pièce est défectueuse. » ;

   E : « la pièce ne présente aucun défaut. »

   c) Calcule les probabilités des évènements C, D et E

2. a) Sachant que la pièce extraite est défectueuse, quelle est la probabilité que la pièce présente des défauts d'usinage par les deux machines ?

b) Exprime à l'aide de A et B l'événement : « le défaut provient uniquement de la machine M_2. »

c) Déduis-en la probabilité que le défaut provienne uniquement de la machine M_2, sachant que la pièce est défectueuse.

Exercice 12

Lors d'une enquête réalisée auprès des jeunes d'une région, concernant leur envie de voyager, on apprend que 55% des jeunes interrogés aimeraient aller en Amérique, 40% aimeraient aller en Europe et 5% aimeraient rester en Afrique. 60% de ceux qui aimeraient aller en Amérique possèdent un passeport, 80% de ceux qui aimeraient aller en Europe possèdent un passeport et enfin 10% de ceux qui aimeraient rester en Afrique possèdent un passeport.

On note : T l'événement : « l'individu interrogé possède un passeport ».

A l'événement : « l'individu interrogé aimerait aller en Amérique ».

E l'événement : « l'individu interrogé aimerait aller en Europe ».

R l'événement : « l'individu interrogé aimerait rester en Afrique ».

1) Précise à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes :
$P(A)$, $P(T/A)$ et $P(\overline{T}/E)$.

2) Calcule la probabilité de l'événement D : « l'individu aimerait aller en Amérique et possède un passeport ».
3) Montre que la probabilité de l'événement T est égale à 0,655.
4) On interroge au hasard un individu ayant un passeport.
Calcule la probabilité pour qu'il aimerait aller en Amérique.
5) On interroge trois individus de manière indépendante l'un après l'autre
a) Calcule la probabilité pour qu'au moins un possède un passeport.

b) Calcule la probabilité pour qu'exactement les deux premières personnes interrogées possèdent un passeport.

c) Calcule la probabilité pour qu'exactement deux des personnes interrogées possèdent un passeport.

Exercice 13

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une boîte contient huit cubes : 1 gros rouge, 3 petit rouges ; 2gros verts, 1 petit vert et 1 petit jaune.

Un enfant tire simultanément, et au hasard, trois cubes de la boîte ; (on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendant de sa taille et de sa couleur).

1- On note A l'évènement : « Obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'évènement : « Obtenir au plus un petit cube ».
 a) Calcule P(A) ;
 b) Vérifie que $P(B) = \frac{2}{7}$.

2- Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petit cube tiré par l'enfant.
 a) Détermine la loi de probabilité de X.
 b) Calcule l'expérience aléatoire de X.
 c) Détermine la fonction de répartition de X.

3- L'enfant répète n fois de suite l'épreuve, en prenant soins de remettre dans la boîte, les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant ; les tirages étant ainsi indépendants.
On pose P_n la probabilité que l'évènement B se produise au moins une fois sur les n épreuves.

a) Exprime P_n en fonction de n.

b) Détermine la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $P_n \geq 0{,}99$.

Exercice 14

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On prélève au hasard et successivement avec remise n boules de l'urne (n étant un entier naturel supérieur à 2).

1- On note A l'évènement : « Obtenir des boules des deux couleurs » et B l'évènement : « Obtenir au plus une boule blanche ».
a) Détermine la probabilité de l'évènement : « Toutes les boules tirées sont de la même couleur ».
b) Détermine la probabilité de l'évènement : « Obtenir exactement une boule blanche ».
c) Déduis-en que les probabilités $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$; $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ et $P(B) = \frac{n+1}{2^n}$.
d) Montre que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow 2^{n-1} = n+1$.

2- Soit (U_n) la suite définie par : $\forall n \geq 2$, $U_n = 2^{n-1} - (n+1)$.

3- Calcule U_2, U_3 et U_4.

4- Démontre que la suite (U_n) est strictement croissante.

5- Déduis-en la valeur de l'entier naturel n tel que les évènements A et B soit indépendants.

Exercice 15

Le beton est un matériau de construction fabriqué à partir d'un mélange de ciment, de granulats et d'eau. Selon l'usage prévu (dalle, poutre, fondation…), on utilise des bétons de compositions différentes. Dans cet exercice, on s'intéresse au béton adapté à la construction d'une dalle et on étudie la résistance à la compression, exprimée en mégapascal (Mpa), en fonction de la durée t de séchage, exprimée en jour. On admet que cette résistance peut être modélisée par la fonction *f*, définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}15y = 4{,}5$.

1- Résous l'équation différentielle (E) sur $[0, +\infty[$.

2- A l'instant $t = 0$, la résistance à la compression de ce béton est nulle.
Montre alors que la fonction *f* est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = -30e^{-0{,}15t} + 30$.

3- Détermine la limite de $f(t)$ lorsque que t tend vers en $+\infty$ et interprète le résultat dans le contexte.

4- Il est possible de marcher sur ce type de béton lorsque sa résidence à la compression est supérieure à 12 Mpa. Après combien de jours complets de séchage est-il possible de marcher sur ce type de béton ?

Exercice 16

Partie A

La fonction *f* est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$. On note (C) la courbe représentative de *f* dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) *unité graphique : 1 cm.*

1- Etudie la limite de *f* en $+\infty$.

2- Etudie la dérivée de *f* et dresser son tableau de variation.

3- Justifie que l'équation $f(x) = 10$ admet une et une seule solution α strictement positive ; donne une valeur approchée à 10^{-3}- près de α.

4- Trace (C).

5- Calcule à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $I = \int_0^3 f(x)dx$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degré Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t où t est exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$ est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel positif t associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle

(E) : $y'(t)+\frac{1}{2}y(t)=20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1- Vérifie que la fonction f étudiée dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2- On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0, +\infty[$, vérifiant $g(0) = 10$. Démontre que $g - f$ est solution, sur de l'équation différentielle (E') : $y'(t)+\frac{1}{2}y(t)=0$.

b) Résous l'équation différentielle (E') et déduis-en une conclusion relative à l'objectif poursuivi.

3- Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? le résultat sera arrondi à la minute.

4- La valeur θ en degré Celsius de la température moyenne de cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$. Calcule la valeur exacte de θ, puis donne la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

Exercice 17

Soit l'équation différentielle $(E): y''-4y=-\frac{16}{3}e^{-2x}$.

1) Résous l'équation $(E_0): y''-4y=0$.

2) Vérifie que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\frac{3}{4}xe^{-2x}$ est une solution de (E).

3) Démontre qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si $f-g$ est solution de (E_0).

4) Déduis-en les solutions de (E).

5) Détermine la solution particulière h de (E) vérifiant : $h(0)=\frac{4}{3}$.

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(3x+8)e^{2x}$.

1) Démontre que f est solution de l'équation différentielle : $y'-2y=3e^{2x}$.

2) Déduis-en le calcul de l'intégrale $\int_0^{\ln 2} f(x)dx$.

Exercice 19

1) A l'aide d'une intégration par parties, calcule chacune des intégrales suivantes :

$I=\int_1^e \ln t\,dt$; $J=\int_0^\pi (x+2)e^x dx$ et $K=\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt$.

2) A l'aide de deux intégrations par parties, calcule chacune des intégrales suivantes :

$I_1=\int_{-1}^0 (1+t)^2 e^{-t}dt$ et $J_1=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x e^x dx$.

3) A l'aide d'un changement de variable affine, calcule chacune des intégrales suivantes :

$I_2=\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt$; $J_2=\int_0^\pi \cos(3x+\pi)dx$ et $K_2=\int_0^1 (4t+7)^5 dt$.

Exercice 20

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x)=2x+1-xe^{x-1}$ et (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité graphique : 5 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

1) Soit la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$. (D) est une asymptote à (C) en $-\infty$.

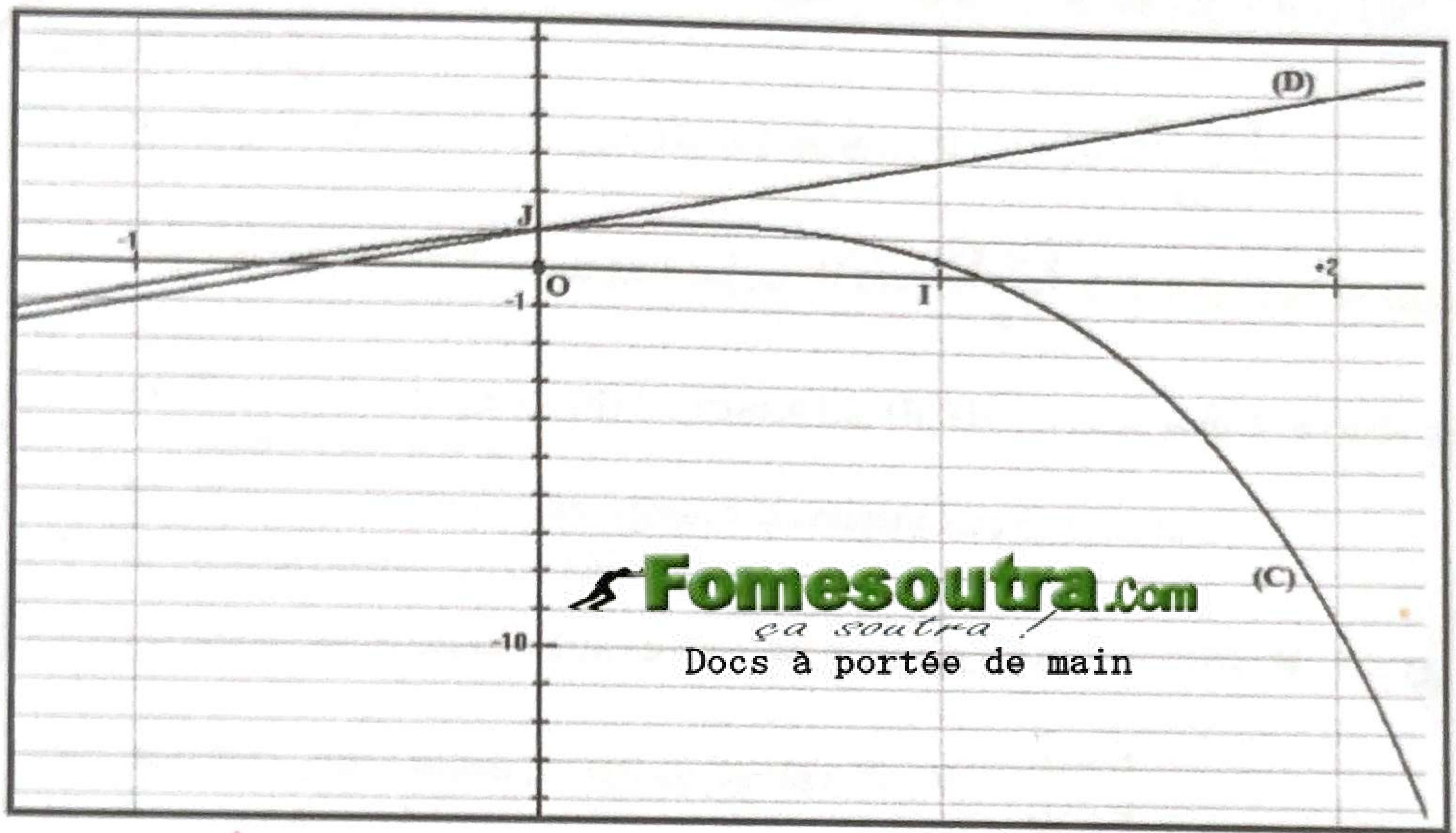
Etudie la position relative de (D) par rapport à (C). (On précisera le point d'intersection de (D) et (C)).

2) Pour λ un nombre réel strictement inférieur à 0, on pose $I = \int_{\lambda}^{0} xe^{x-1}\,dx$. Détermine I à l'aide d'une intégration par parties.

3) On a fourni en annexe la courbe représentative (C) de f et la droite (D). Soit $A(\lambda)$ l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (D), (C) et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

Hachure sur le graphique la partie correspondante à $A(\lambda)$ pour $\lambda = -1$.

4) Calcule $A(\lambda)$ puis calcule $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.



Exercice 2

Le tableau ci-dessous présente la taille x (en centimètres) et la pointure y de chaussures (en centimètres) de dix élèves choisis au hasard dans une classe de terminale D.

x	150	159	158	160	165	168	170	172	175	171
y	40	41	43	43	42	44	44	44,5	44,5	44

1. Calcule les coordonnées du point moyen G du nuage de points de cette série statistique.
2. a) Vérifie que la covariance et les écart-types marginaux σ_x et σ_y de la série $(x ; y)$ sont respectivement égaux à 9,6 ; 7,4 et 1,4.

   b) Calcule le coefficient de corrélation linéaire de de la série $(x ; y)$ et donner une interprétation de la valeur obtenue.

   c) Utilise la méthode des moindres carrées pour donner une équation cartésienne de l'ajustement linéaire de y en x.

   d) Déduis-en au centième près la pointure d'un élève de la classe dont la taille est de 163 cm dans le cas où la tendance générale est proche de celui de l'échantillon choisi.
3. On choisit simultanément et au hasard six élèves parmi les dix élèves sélectionnés.

   Calcule la probabilité d'avoir exactement trois élèves dont la pointure est d'au moins de 44 cm.
4. On choisit au hasard un élève parmi les dix, et on se rend compte que sa pointure est inférieure ou égale à 44 cm. Calcule la probabilité de l'évènement « la taille est supérieure ou égale à 160 cm »

Exercice ~~18~~ 2

On considère la suite réelle $(u_n)_n$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et par la relation :

$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Soit $(v_n)_n$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1. a) Montre que la suite $(v_n)_n$ est une suite géométrique.

   b) Calcule le terme général v_n en fonction de n.

   c) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}$. Exprime S_n en fonction de n.

5. a) Déduis de la question précédente le terme général u_n en fonction de n.

   b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_n$?

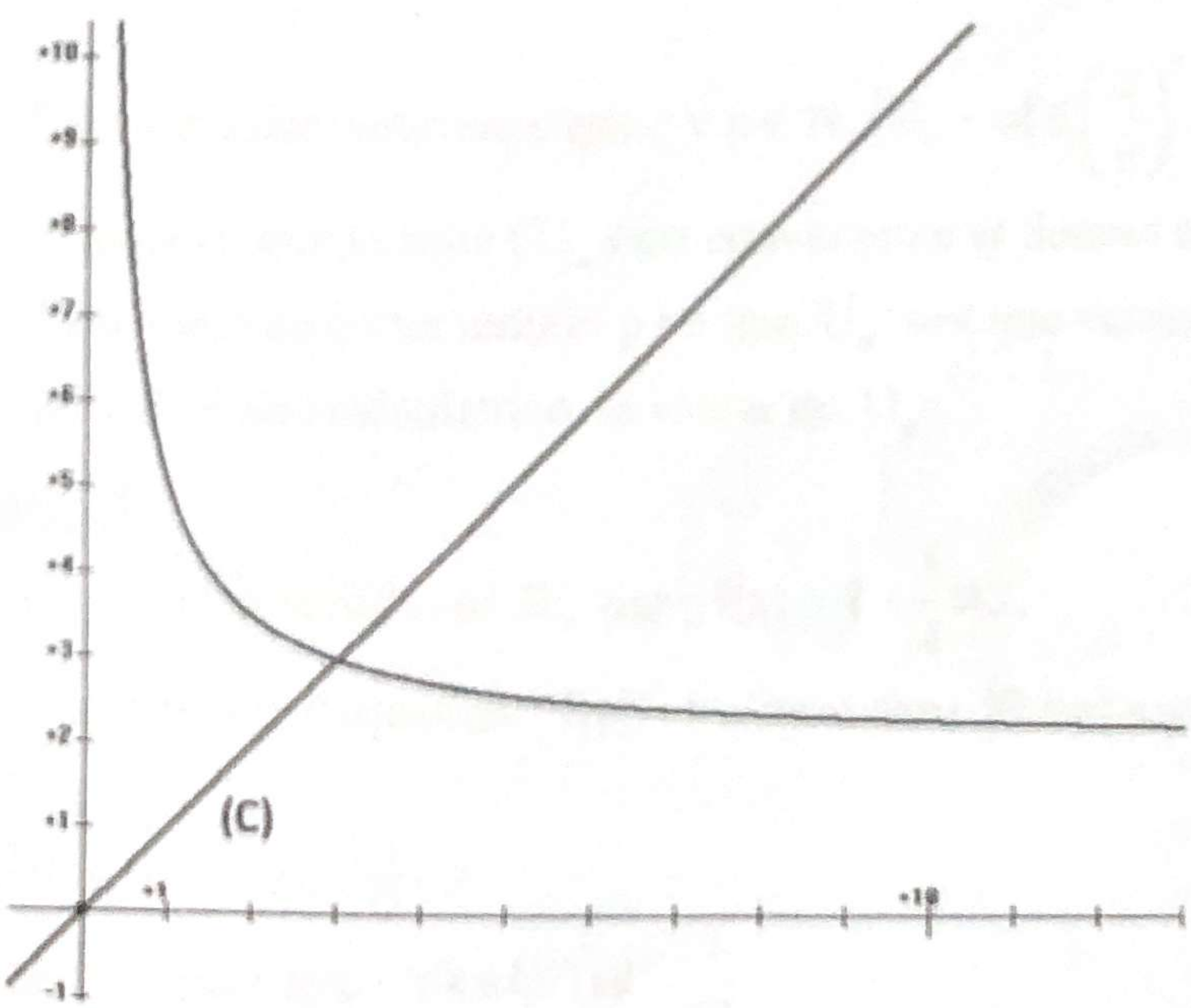
6. Détermine le plus petit entier n_0 tel que : $\forall n \geq n_0$ on ait $|u_n - 3| < 10^{-5}$

Exercice ~~19~~ 3

On considère la suite U définie par: $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n}$

1. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ et dont la représentation graphique (C) est donnée ci-dessous.
   a) Représente sur l'axe (OI) les termes U_0; U_1; U_2; U_3 de la suite U à l'aide de la courbe (C) et la droite (D) d'équation : $y = x$.
   b) Que peut-on conjecturer quant à la convergence de la suite U ?
2. a) Montre que $f([1;5]) \subset [1;5]$.
   b) Déduis-en au moyen d'un raisonnement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n \leq 5$.
3. Soit V la suite numérique définie par $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1}$.
   a) Démontre que V est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.
   b) Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3^n}\right)$.

4. a) Exprime U_n en fonction de V_n, puis en fonction de n.
   b) Déduis-en la limite de la suite U.



Exercice 24

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$

1. Calcule u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n, par : $v_n = u_n + \frac{3}{2}$
   a) Démontre que pour tout nombre entier naturel n, la suite (v_n) est géométrique.
   b) Exprime v_n en fonction de n.
   c) Déduis-en u_n en fonction de n.
   d) Etudie la limite de la suite (u_n).
3. On pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $\Sigma_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
   Exprime S_n puis Σ_n en fonction de n.

Exercice 25

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$ par : $f(x) = x - e^{2x-2}$.

1- Détermine la limite de f en $-\infty$

2- Justifie que f est strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$.

3- Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Partie B

On définit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = e^{2U_n - 2}$.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x-2}$.

1- Démontre que : $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$.

2- Déduis-en la valeur de $g(\alpha)$.

3- Démontre que : $\forall x \in I$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$.

4- Démontre que : $\forall x \in I$, on a : $g(x) \in I$.

5- Utilise l'inégalité des accroissements finis, pour démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e}|U_n - \alpha|$.

6- Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.

7- Déduis-en que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

8- Détermine un entier naturel p tel que U_p soit une valeur approchée de α à 10^{-5} - près et indiquer à l'aide d'une calculatrice, la valeur de U_p.

Exercice 26

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = 4 - \frac{1}{4}\ln x$.

1) Démontre que l'équation : $f(x) = x$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique α et que α appartient à $I =]3;4[$.

2) a) Démontre que $f(I) \subset I$.

   b) Démontre que : $\forall x \in I, |f'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

3) Soit (w_n) la suite définie par : $w_0 = \dfrac{7}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = f(w_n)$.

a) En utilisant le théorème des accroissements finis, démontre que $\forall n \in \mathbb{N}, |w_n - \alpha| \leq (\frac{1}{12})^n |w_0 - \alpha|$.

b) Déduis-en que $\forall n \in \mathbb{N}, |w_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{12})^n$, puis que $\lim w_n = \alpha$.

c) Détermine une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Exercice 27

Partie A

Soit $P(z) = z^3 + (-1+i)z^2 + (2+2i)z - 8i$

1) Vérifie que 2i est l'unique solution imaginaire pure de l'équation (E) : $P(z) = 0$
2) Justifie que : $P(z) = (z-2i)\left(z^2 + (-1+3i)z - 4\right)$
3) Déduis-en la résolution de l'équation (E).

Partie B

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : 2 - 2i; -1- i; -1 + i et 2i.

1) Place dans le repère les points A ; B ; C et D.
2) Démontre que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 28

On considère l'équation suivantes : (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - (3+2i)z^2 + (3+5i)z - 2 - 6i = 0$.

1. a) Démontre que (E) admet une solution imaginaire que l'on calculera.
   b) Résous (E).
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. On considère les points A, B, et C d'affixes respectives 2i, 1 – i et 2 + i. S est la similitude directe de centre O qui transforme A en B.
   a) Détermine le rapport et l'angle de S.
   b) Détermine l'écriture complexe de S.
   c) D est l'image de B par S. Calcule l'affixe de D.

Exercice 29

On considère le nombre complexe $u = \sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}$

1. a) Montrer que $u^2 = -2\sqrt{3} - 2i$
   b) Calculer $|u^2|$ et $\operatorname{Arg}(u^2)$
2. a) En déduire le module de u et un argument de u.
   b) Vérifier que $\dfrac{19\pi}{12}$ est un argument de u.
3. a) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{19\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{19\pi}{12}\right)$.
   b) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ puis celles de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$

Exercice 39

Dans le plan complexe, rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère la transformation plane T, qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = a^2 z + a^2 - a$; $(a \in \mathbb{C}^*)$.

1) Détermine a pour que cette transformation soit une translation. Caractériser cette translation.
2) On suppose $a \neq 1$ et $a \neq -1$.
   a) Démontre que la transformation T admet un point invariant dont on précisera l'affixe.
   b) Détermine a pour que cette transformation T soit une rotation d'angle α de mesure principale $\frac{\pi}{3}$.
   c) Détermine le réel a pour que cette transformation T soit une homothétie de rapport -3.
3) Caractérise cette transformation T dans le cas où $a = 1 + i$

Exercice 40

Partie A

Soit *f* la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{2x-2}$. On désigne (Γ) la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), 5cm pour l'unité graphique.

4- Détermine la limite de *f* en $-\infty$
5- Détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis en donner une interprétation graphique.
6- Détermine la dérivée f' de *f*.
7- Justifie que *f* est strictement croissante sur $]-\infty, \lambda]$ et *f* est strictement croissante sur $[\lambda, +\infty[$ où $\lambda = \frac{2 - \ln 2}{2}$.
8- Justifie que *f* admet un extremum que l'on précisera.
9- Justifie que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (Γ) en $-\infty$.
10- Etudie la position relative de (Γ) et de (D).
11- Détermine une équation de la tangente (T) à (Γ) au point A d'abscisse 1.
12- Justifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $I = [0 ; \frac{1}{2}]$ et donne une valeur approchée de α à 10^{-1} - près.
13- Construis (Γ) est la courbe représentative de *f*, l'asymptote (D) et la tangente (T).

Partie B

On définit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = e^{2U_n - 2}$.

10- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x-2}$. Démontre que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.
11- Déduis-en la valeur de $g(\alpha)$.
12- Démontre que : $\forall x \in I$, on a : $|g'(x)| \leq \frac{2}{e}$.
13- Démontre que : $\forall x \in I$, on a : $g(x) \in I$.
14- Utilise l'inégalité des accroissements finis, pour démontrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{e} |U_n - \alpha|$.
15- Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$.
16- Déduis-en que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.