FICHE DE TRAVAUX DIRIGES MATHEMATIQUES NIVEAU TLE

ETUDE DE FONCTION RATIONNELLE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\ ;1\}$ par $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$, de courbe représentative (C_f).

1. Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

a)Etudie le sens de variation de g et

et calcule ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$

une unique solution notée α.

c) Donne un encadrement de α d'amplitude 0,1.

d) Déduis en le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. a)Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Détermine les limites de f à gauche et à droite en -1 et en 1.

Interprète graphiquement les résultats obtenus

c)Montre que pour tout $x \in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$,

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

d) Déduis en les variations de f et dresser son tableau de variation.

3.a)Détermine les nombres réels a, b , c et d tels que pour tout $x \in\mathbb{R}\setminus\{-1\ ;1\}$,

$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$.

b) Déduis en que (C_f) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y = x + 2$.

c) Etudie la position relative de (C_f) et (D).

4) Donne une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 2.

5) Trace (Cf) et la tangente (T).

DENOMBREMENT

EXERCICE 1

Un sac contient neuf jetons : cinq verts numérotés de 1 à 5 ; trois rouges numérotés de 1 à 3 ; un blanc numéroté 1 . On tire successivement et sans remise trois jetons du sac.

1. Combien y a-t-il de tirages unicolores ?
2. Combien y en a-t-il contenant exactement 2 jetons verts ?

EXERCICE 2

Dans une classe de 60 élèves dont 36 garçons et 24 filles, on choisit un comité de 3 personnes.

1. Dénombrer tous les cas possibles.
2. Déterminer le nombre de comités comprenant exactement 2 garçons.
3. Déterminer le nombre de comités comprenant au plus 1 fille.
4. Déterminer le nombre de comités comprenant au moins 1 fille.

SUITE NUMERIQUE

Exercice 1

1) (u) est une suite arithmétique de raison -3. Détermine une relation entre u_{n+1} et u_n.

2) (v) est une suite géométrique de raison -3. Détermine une relation entre v_{n+1} et v_n .

Exercice 2

1) (u) est une suite arithmétique de raison 2 et $u_3 = -5$. Exprime u_n en fonction de n.

2) (v) est une suite géométrique de raison $-\frac{3}{2}$ et $v_4 = 16$. Exprime v_n en fonction de n.

Exercice 3

1. (u) est une suite arithmétique de raison -3 et $u_2 = 7$.
   Calcule la somme : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$
2. (v) est une suite géométrique de raison -2 et $v_4 = 16$.
   Calcule la somme : $v_2 + v_3 + \cdots + v_{21}$

Exercice 4

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 6$.

Exercice 5

Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = n^2 + 3n$. Démontre que la suite (w_n) est croissante.

Exercice 6

Soit la suite(v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = e^{-2n+1}$.
Démontre que la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 7

Soit (u_n) une suite de nombres réels.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	Si pour tout entier naturel n, $u_n < -3$, alors la suite (u_n) est minorée par -3	
2	S'il existe un entier naturel n, tel que $u_n \geq 0$, alors la suite (u_n) est minorée par 0	
3	Si pour tout entier naturel n, $u_n \geq 2$, alors la suite (u_n) est majorée par 2	
4	Si pour tout entier naturel n, $\lvert u_n \rvert < 1$, alors la suite (u_n) est bornée	

Exercice 8

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{3n^2-2n+1}{n^3}$.
Calcule la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 9

Détermine la limite de la suite (u_n) de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1) $u_n = \frac{\ln(n+1)}{n}$ 2) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

Exercice 10

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	Toute suite décroissante et à termes positifs est convergente.	
2	Toute suite croissante et non majorée est convergente.	
3	Toute suite croissante est nécessairement convergente	
4	Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.	

Exercice 11

Pour chaque limite, parmi les quatre lettres A, B, C et D, choisis la lettre correspondant à la réponse juste.

		A	B	C	D
1	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-3} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
2	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
3	$\lim\limits_{n\to+\infty} (-3)^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
4	$\lim\limits_{n\to+\infty} (-\frac{2}{e})^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
5	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{5}{6}} =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas
6	$\lim\limits_{n\to+\infty} (7)^n =$	0	1	$+\infty$	n'existe pas

Exercice 12

Calcule la limite de chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par :

$u_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$, $v_n = n^2 - 2^{n+3}$ et $w_n = \frac{n\times 3^n}{4^n}$.

Exercice 13

Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0{,}8 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1+\frac{u_n}{2}) \end{cases}$.

On suppose que la suite (u_n) est décroissante et que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

Démontre que la suite (u_n) est convergente et détermine sa limite.

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exercice 1

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune les équations suivantes :

1) $e^{2x-1} = e^{x+5}$
2) $e^{x-2} = 5$
3) $e^{2x} + e^{x} - 6 = 0$

Exercice 2

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune les inéquations suivantes :

1) $e^{2x-1} < 8$
2) $e^{2x} - 5e^{x} + 6 \geq 0$

Exercice 3

Calcule les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)\,e^{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{-x}+1)$

Exercice 4

Détermine la limite des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$:

a) $f(x) = (2-3x)\,e^{x}$; b) $g(x) = (x+1)\,e^{-x}$; c) $h(x) = 3 - 2x + e^{x}$

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcule la fonction dérivée de f.

a) $f(x) = e^{-2x+1}$ b) $f(x) = x + 2 - e^{x}$ c) $f(x) = (1-x)e^{x}$

Exercice 6

Détermine la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = (-2x+5)\,e^x$; $g(x)=\left(-3x^2+5\right)e^x$; $h(x)=\dfrac{e^x-1}{x+1}$; $k(x)=\dfrac{e^x+2}{e^{x-1}}$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, détermine une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = e^{-4x} + 2x$

b) $f(x) = 2xe^{x^2}$

c) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

d) $f(x) = x - 5 + 3e^{-2x+1}$

Exercice 8

Détermine une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$f(x)=3x^2e^{x^3}$; $g(x)=e^x+1$; $h(x)=2xe^{x^2-1}$.

Exercice 9

1. On donne $p(x)=2x^3-7x^2-5x+4$.
   a) Vérifie que $p(-1)=0$
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :
   $2e^{3x}-7e^{2x}-5e^x+4<0$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)e^x$

a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
b) Calcule la dérivée f' de f
c) Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

ETUDE FONCTION

On considère la fonction g de$\mathbb{R}$vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 1 - x - 2e^{-x}$.
Etudier les variations de g (on ne demande pas de calculer les limites).
a) Calculer g (ln2).
b) En déduire que pour tout réel x ; $g(x) < 0$.
PARTIE B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle $f(x) = e^{-x}(x + e^{-x})\, e^{-x}$
On appelle(C) sa représentation graphique dans le repère orthonormé (O ; I ; J). Unité graphique 2cm.
1- a) Calculer la limite de f en$+\infty$.
b) Interpréter graphiquement le résultat.
2- a) Montrer que $f(x) = e^{-2x}(xe^x + 1)$.
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.
a) Démontrer que pour tout x$\in\mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
5- a) Justifier que f est une bijection puis dresser le tableau de variation de f^{-1}.
b) Calculer $f(0)$
c) Calculer $(f^{-1})'(1)$.
d) Tracer (T) ; (C) et (C') la courbe de f^{-1}.

PARTIE C

On considère la fonction F de $\mathbb{R}$vers $\mathbb{R}$ définie par: $\boldsymbol{F(x)}= e^{-x}(ax+b+ce^{-x})$.

1) Déterminer les réels a ; b et c pour que F soit une primitive de f.
2) Déterminer une pimitive F de f qui prend la valeur 0 en 1