REVISION – $4^{ème}$ Sc.Exp.

Exercice 1 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v) d'unité graphique 2cm.

Soit les points A, B et C d'affixe respective $a = -1 + i\sqrt{3}$; $b = -1 - i\sqrt{3}$ et $c = 2$

1) a) Déterminer le module et l'argument de a, b et c

b) placer les points A, B et C

2) a) Ecrire $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme algébrique et exponentielle.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral de centre O.

c) En déduire que les points A, B et C sont situés sur un cercle (C_1) qu'on précisera.

3) Montrer que l'ensemble (C_2) suivant est un cercle qu'on notera I son centre et r son rayon.

$(C_2) = \{ M(z) \in \mathbb{P} \text{ tel que } 2(z + \overline{z}) + z\overline{z} = 0 \}$

4) a) Montrer que le point $I \in (C_1)$

b) Construire dans le même repère (C_1) et (C_2) .

Exercice 2 :

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ unité graphique 1 cm.

1) On donne $m = =\sqrt{2}e^{ia}$ et $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}e^{ia}}$; $z'' = \frac{1-i}{\sqrt{2}e^{ia}}$

a) Montrer que $z' = e^{i(\frac{\pi}{4}-a)}$ et $z'' = e^{-i(\frac{\pi}{4}+a)}$

b) Soit M', M'' et M les points d'affixes respectives z', z'' et z' + z''.

Montrer que OM' = OM'' et que $\overrightarrow{OM'}$ $\overrightarrow{OM''}$ sont orthogonaux .

c) Montrer que OM'MM'' est un carré.

Partie B

Soit K le point d'affixe k où k = 10 et. Γ le cercle de diamètre [OK], et par Ω le centre de Γ.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c où a =5+ 5i, b =1 +3i et c= 8 -4i.

1) Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.

2) Soit L le point d'affixe 2 + 2i ; Montrer que L est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

3) A tout point M du plan différent de O d'affixe Z, on associe le point M' d'affixe Z' tel que $Z' = \frac{20}{\overline{Z}}$

4) Montrer que les points O, M et M' sont alignés.

5) Soit Δ la droite d'équation x = 2 et M un point de Δ d'affixe z.

On se propose de définir géométriquement le point M'associé au point M.

a) Vérifiez que $\overline{Z} + Z = 4$

b) Exprimez $\overline{Z'} + Z'$ en fonction de $\overline{Z}$ et Z et en déduire que $5(\overline{Z'} + Z') = \overline{Z'} . Z'$.

c) En déduire que M'appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ. Placer M' sur la figure.

Exercice 3 :

A/ 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 4\sqrt{2}.z + 16 = 0$. Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

2) En déduire les solutions dans$\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 - 4\sqrt{2}.z^2 + 16 = 0$ sous la forme exponentielle.

■ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) On donne les points $A(2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $B(-2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $C(2e^{-i\frac{\pi}{8}})$ et $D(-2e^{-i\frac{\pi}{8}})$.

Montrer que le quadrilatère ACBD est un rectangle et que son aire $\mathcal{A} = 4\sqrt{2}$

B/ On considère l'équation (E_θ) : $i.z^2 + (2\sin\theta).z - i = 0$; où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

1) Montrer que $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ). En déduire l'autre solution z_2 de (E_θ).

2) On donne les points M_1 et M_2 d'affixes respectifs $e^{i\theta}$ et $(-e^{-i\theta})$

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}) \equiv \pi - 2\theta [2\pi]$

b) Déterminer la valeur de θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour laquelle le triangle OM_1M_2 soit équilatéral.

Révision 1

Exercice 1

$a = 1 + i\sqrt{3}$

$b = 1 - i\sqrt{3}$

$c = 2$

1) a) $|a| = \sqrt{1+3} = 2$

$a = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\arg(a) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$|b| = \sqrt{1+3} = 2$

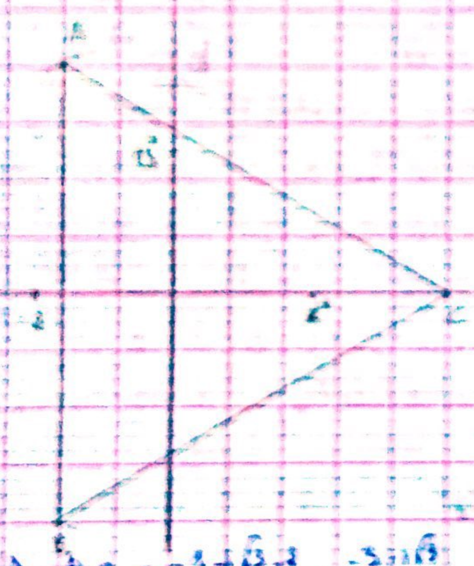
$b = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\arg(b) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$|c| = 2$

$c = 2e^{i0}$; $\arg(c) = 0\ [2\pi]$

b)



2) a) $\frac{b-c}{a-c} = \frac{1 - i\sqrt{3} - 2}{1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{-1 + i\sqrt{3}}$

$= \frac{(1 + i\sqrt{3})^2}{\ldots} = \frac{1 + 3 + 2i\sqrt{3}}{\ldots} = \frac{\ldots + i\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{b-c}{a-c} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $AB = |b - a| = |1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}|$

$= |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$AC = |c - a| = |2 - 1 - i\sqrt{3}| = |1 - i\sqrt{3}|$

$= \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$

$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |e^{i\frac{\pi}{3}}| = 1$

donc $|b - c| = |a - c|$ donc

$BC = AC$ et $AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$

donc le triangle ABC est équilatéral

$|a| = |b| = |c| = 2$ donc $OA = OB = OC$

donc O le centre du triangle ABC

donc $OA = OB = OC = 2$ donc A, B et C

sont situés sur le cercle $\mathscr{C}$ de

centre O et de rayon 2

3) $(\mathscr{C}_1)$: $\{M(z) \in P$; $z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} = 0\}$

Soit $M(z) \in P$

On pose $z = x + iy$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\ldots = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$

donc $\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre $I(2, 0)$ et de rayon 2

4) a) $OI = \sqrt{4} = 2$; $I \in \mathscr{C}_1$

Exercice 2

1) E : $z^2 - 4\sqrt{2}z + 16 = 0$

$\Delta = 32 - 64 = -32 = (4i\sqrt{2})^2$

On pose $\delta = 4i\sqrt{2}$

$z_1 = \frac{4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}}{2}$ ou $z_2 = \frac{4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}}{2}$

$z_1 = 2\sqrt{2}(1 - i)$ ou $z_2 = 2\sqrt{2}(1 + i)$

$S_{\mathbb{C}} = \{2\sqrt{2}(1 - i) ; 2\sqrt{2}(1 + i)\}$

• $2\sqrt{2}(1 - i) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$= 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$

• $2\sqrt{2}(1 + i) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

B/ [illegible]

[illegible]

$\text{aff}(\vec{DB}) = -2e^{i\pi/8} + 2e^{-i\pi/8}$

$= 2(e^{-i\pi/8} - e^{i\pi/8}) = 4i\sin(-\frac{\pi}{8})$

$\vec{AC} = \vec{DB} \Rightarrow$ le quadrilatère ACBD ①

$\frac{\text{Aff}(\vec{AC})}{\text{Aff}(\vec{AD})} = \frac{4i\sin(-\frac{\pi}{8})}{-2e^{-i\pi/8} - 2e^{i\pi/8}}$

$= \frac{4i\sin(\pi/8)}{-4\cos(-\pi/8)} = -i\tan(\frac{\pi}{8})$: $\boxed{\text{imaginaire}}$

$\vec{AC} \perp \vec{AD}$ ②

Cl : ① et ② donnent ACBD est un rectangle.

$A = AC \cdot AD = |4\sin(\frac{\pi}{8})| \cdot |4\cos\frac{\pi}{8}|$

$= 4\sin\frac{\pi}{8} \cdot 4\cos\frac{\pi}{8}$

$= 8 \cdot 2\sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{8}$

$= 8 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) = 4\sqrt{2}$

B/ $(E_\theta) : iz^2 + (2\sin\theta)z - i = 0$; $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

1) $iz_1^2 + (2\sin\theta)z_1 - i = ie^{2i\theta} + 2\sin\theta e^{i\theta} - i$

$= i(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + 2\sin\theta(\cos\theta + i\sin\theta) - i$

$= i\cos 2\theta - \cancel{\sin 2\theta} + \cancel{2\sin\theta\cos\theta} + 2i\sin^2\theta - i$

$= i(1 - 2\sin^2\theta) + i(2\sin^2\theta - 1) = 0$

$z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ)

2ème méthode :

$ie^{2i\theta} + (2\sin\theta)e^{i\theta} - i = i[e^{2i\theta} ...]$

$= i[e^{2i\theta} - i\sin\theta \cdot e^{i\theta} - 1]$

$= i[e^{2i\theta} - e^{2i\theta} + e^{-i\theta}e^{i\theta} - 1] = 0$

Soit z_2 l'autre racine.

$z_1 \cdot z_2 = \frac{-i}{i} = -1$ éq $z_2 = \frac{-1}{z_1}$

$= -\frac{1}{e^{i\theta}} = -e^{-i\theta}$

2) a) $(\widehat{\vec{OM_1}, \vec{OM_2}}) = (\widehat{\vec{OM_1}, \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{OM_2}})$ $\boxed{[2\pi]}$

$= -\arg(z_1) + \arg(z_2)$

$= -\theta - \theta + \pi [2\pi]$ car $z_2 = -e^{-i\theta} = e^{i(-\theta+\pi)}$

$= \pi - 2\theta [2\pi]$

$\frac{e^{x} - e^{-x}}{(e^{x} + e^{-x})} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

On a déjà $OM_1 = |z_1| = 1$ et $OM_2 = |z_2| = 1$

donc $OM_1 = OM_2$ ainsi le triangle OM_1M_2 est isocèle en O éq

$(\widehat{\vec{OM_1}, \vec{OM_2}}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$ ou $(\widehat{\vec{OM_1}, \vec{OM_2}}) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

éq $\pi - 2\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $\pi - 2\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

éq $-2\theta = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou

$-2\theta = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ éq

$\theta = \frac{\pi}{3} - k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ ou $\theta = \frac{2\pi}{3} - k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

éq $\theta = \frac{\pi}{3}$ (car $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

Exercice 2 :

A/ 1) a) $z' = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{ia}} = e^{i(\pi/4 - a)}$

$z'' = \frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{ia}} = e^{-i(\pi/4 + a)}$

b) $OM' = |z'| = 1$

$OM'' = |z''| = 1$

$\Rightarrow OM' = OM''$

et $\frac{\text{Aff}\,\vec{OM'}}{\text{Aff}\,\vec{OM''}} = \frac{e^{i(\pi/4 - a)}}{e^{-i(\pi/4 + a)}}$

$= e^{i(\pi/4 - \cancel{a} + \pi/4 + \cancel{a})} = e^{i\pi/2} = i$

imaginaire.

donc $\vec{OM'} \perp \vec{OM''}$

c) $\vec{OM'} \perp \vec{OM''}$ donc $(OM') \perp (OM'')$

donc les pts M, M' et M'' ne sont pas alignés ①.

$z_M = z' + z'' = z_{M'} + z_{M''}$

$\Rightarrow \vec{OM} = \vec{OM'} + \vec{OM''}$ ②

de plus on a $OM' = OM''$ ③

①, ② et ③ donnent $OM'MM''$ est un carré.

B/ Ω est le centre de Γ donc
Ω est le milieu de $[OK]$
$z_\Omega = \frac{z_K}{2} = 5$
$r = \frac{OK}{2} = 5$
$\Omega A = |a - 5| = |-5i| = 5$ donc $A \in \Gamma$
$\Omega B = |b - 5| = |1 + 3i - 5| = |-4 + i3|$
$= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ainsi $B \in \Gamma$
$\Omega C = |c - 5| = |8 + 4i - 5| = |3 + 4i|$
$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ainsi $C \in \Gamma$.
2) $z_L = 2 + 2i$
$\text{aff}(\vec{OL}) = 2 + 2i$
$\text{aff}(\vec{BC}) = 7 + 7i$
$\frac{\text{Aff}(\vec{OL})}{\text{Aff}(\vec{BC})} = \frac{2(1+i)}{7(1+i)} = \frac{2(2i)}{7(1+1)} = \frac{2}{7}i \in i\mathbb{R}$
$\Rightarrow \vec{OL} \perp \vec{BC}$ (1)
Mq $L \in (BC)$
$\text{Aff}(\vec{BL}) = 2 + 2i - 1 - 3i = 1 - i$
$\frac{\text{Aff}(\vec{BL})}{\text{Aff}(\vec{BC})} = \frac{1 - i}{7(1 - i)} = \frac{1}{7} \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \vec{BL}$ col $\vec{BC} \Rightarrow L \in (BC)$. (2)
(1) et (2) donnent L : proj orthogonal de O sur (BC).
3) $z' = \frac{20}{\bar{z}}$
$\frac{\text{aff}(\vec{OM})}{\text{Aff}(\vec{OM'})} = \frac{z}{z'} = z\frac{\bar{z}}{20} = \frac{z\bar{z}}{20} \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow \vec{OM}$ col $\vec{OM'}$
$\Rightarrow$ les pts O, M et M' sont alignés

Remarque :
$\vec{u}\binom{a}{b}$; $\vec{v}\binom{a'}{b'}$.
$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ $ab' - a'b$ $= 0$ $=$ col

RON :
$\vec{v}.\vec{u} = aa' + bb'$
$= 0$
orthogonaux

LYCEES : Tayib Mhiri – Sfax Mahmoud Messaadi – ElJem Kram - Tunis ■■■ **DEVOIR DE SYNTHESE N°2** 05/2021	**Epreuve :** *Mathématiques* **Section :** 4ème *Sciences Expérimentales* **Durée :** 3 *heures* — **Coefficient :** 3 **Professeurs : Mona Sellami Tahar Hassine Wissem Fligène**

Exercice 1 : (6 pts)

Une usine fabrique des cartes magnétiques. Un cadre technique vérifie la qualité de la production avant sa commercialisation. Chaque carte produite par l'usine est soumise à deux contrôles. D'une part le contrôle de solidité et d'autre part le contrôle de fonctionnalité. Il remarque à la suite de la vérification d'un grand nombre de cartes fabriqués que :

- 92% des cartes sont sans défauts solidité.
- Parmi les cartes qui sont sans défaut de solidité, 95% fonctionnent parfaitement.
- 2% des cartes présentent les deux défauts.

On prend au hasard une carte parmi les cartes produites.

Soit S l'événement « la carte est sans défaut de solidité » et F l'événement « la carte fonctionne parfaitement »

1) a) Traduire les données pour déterminer $p(S)$; $p(F|S)$ et $p(\overline{F} \cap \overline{S})$.

   b) Montrer que $p(\overline{F}|\overline{S}) = \frac{1}{4}$.

2) a) Construire l'arbre de probabilité complet.

   b) Montrer que $p(F) = 0{,}934$.

   c) Une carte a réussi le test de fonctionnalité, quel est la probabilité qu'elle réussit l'examen de solidité.

3) Chaque carte solide et fonctionnant parfaitement rapporte un bénéfice de 50 D. chaque carte qui ne fonctionne pas est rejetée. L'autre type de carte rapporte un bénéfice de 20 D. soit X la variable aléatoire égale au bénéfice rapporté par une carte fabriquée.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer la moyenne des bénéfices.

4) On prend au hasard, successivement et avec remise 15 cartes d'un lot contenant un nombre suffisamment important de cartes. On désigne par Y la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de cartes en bon fonctionnement.

   a) Déterminer la loi de probabilité de Y. Calculer E(Y) et V(Y).

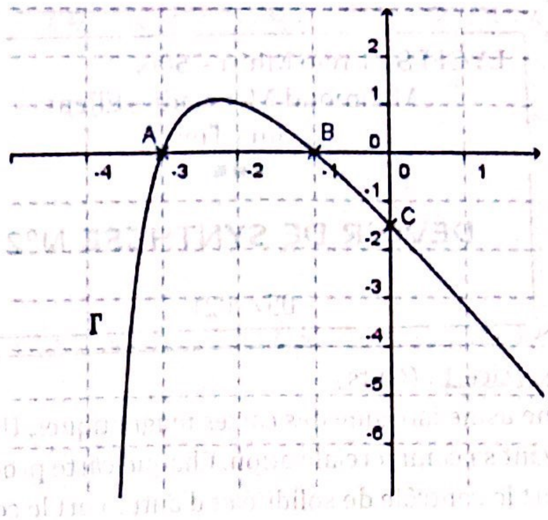
   b) Déterminer la probabilité de l'événement A :" Au moins une carte du lot fonctionne parfaitement"

Exercice 2 : (4 pts)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-4, +\infty[$.

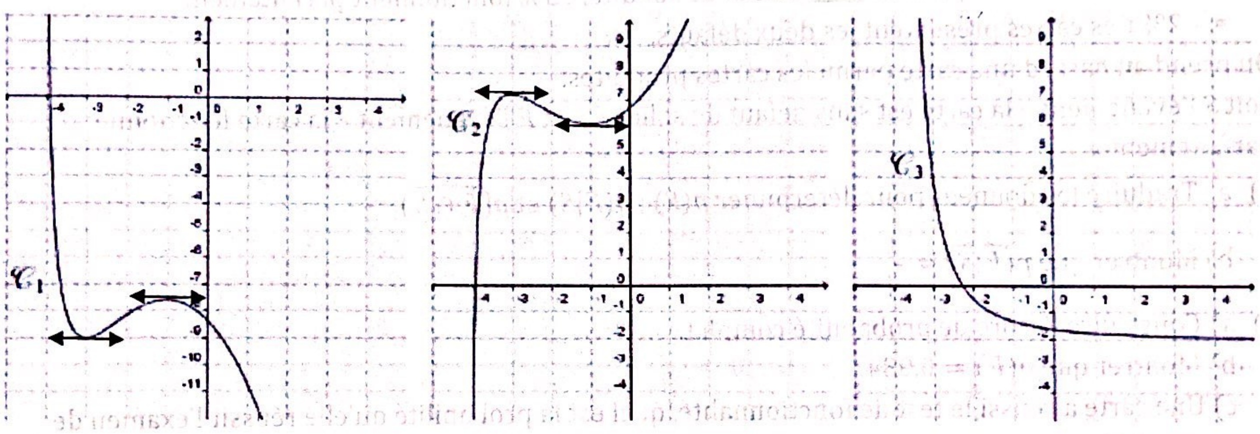
La courbe Γ ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthogonal de f', la fonction dérivée de f sur $]-4, +\infty[$.

Cette courbe Γ passe par les points $A(-3\,;0)$, $B(-1\,;0)$ et $C(0\,;\,-1{,}5)$.



Partie A

1) A l'aide de la représentation graphique de f', déterminer $f'(0)$, $f'(-1)$ et $f'(-3)$.
2) Trois courbes sont présentées ci-dessous. Une seule de ces trois courbes peut représenter la fonction f.
   Déterminer laquelle, en justifiant votre réponse :



Partie B

On suppose qu'il existe deux entiers relatifs a et b tels que, pour tout réel $x \in]-4, +\infty[$, on a $f(x) = ax^2 + b\ln(x+4)$.

1) a) Soit $x \in]-4, +\infty[$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, a et b.
   b) Déduire des questions précédentes que $a = -1$ et $b = -6$.
2) On considère l'intégrale $I = \int_{-3}^{-1} f'(x)dx$.
   a) Calculer la valeur exacte de I.
   b) Donner une interprétation géométrique de I.

Exercice 3 : (4 pts)

a étant un nombre complexe de module 1.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$

1) a) Vérifier que a est une racine de (E).
   b) En déduire l'autre racine b de (E).
   c) Vérifier que $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2) Soit les points A et B d'affixes respectives a et b.
   Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
3) Soit les points C et D d'affixes respectives $c = \left(\frac{3-i\sqrt{3}}{3}\right)a$ et $d = \left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{6}\right)a$.
   a) Montrer que les points O, C et D sont alignés.
   b) Montrer que les droites (OB) et (OD) sont perpendiculaires.
   c) Calculer alors l'aire du triangle BCD.

Exercice 4 : (6 pts)

Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = \sqrt{1-e^x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter le résultat.
2) Justifier que le tableau ci-dessous est le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		0
f'(x)		$-$	||
f(x)	1	$\searrow$	0

3) Tracer (C).
4) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $[0,1[$.

(On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et (Γ) sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

   b) Tracer (Γ).
5) a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1[$. $f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2)$.
   b) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = (x - 1)\ln(1 - x) + (x + 1)\ln(x + 1) - 2x$ est une primitive de f^{-1} sur $[0,1[$.
   c) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (Γ) et les droites d'équations $y = -\ln 2$; $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
   d) En déduire la valeur de $\int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1-e^x}\,dx$

Loi binomiale est un cas exeptionel de la loi de probabilité ?
Oui
Gain algébrique = ⊕ ou ⊖.

Bac Blanc

Exercice 1 :

1) a) $p(S) = 0,92$

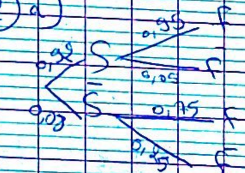
$p(F/S) = 0,95$

$p(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,02$

b) $p(\bar{F}/\bar{S}) = \dfrac{p(\bar{F} \cap \bar{S})}{p(\bar{S})} = \dfrac{0,02}{1-0,92}$

$= 0,25 = \dfrac{1}{4}$

2) a)



b) $p(F) = p(F \cap S) + p(F \cap \bar{S})$

$= p(F/S)\,p(S) + p(F/\bar{S})\,p(\bar{S})$

$= 0,92 \cdot 0,95 + 0,08 \cdot 0,75$

$= 0,934.$

c) $p(S/F) = \dfrac{p(S \cap F)}{p(F)} = \dfrac{0,92 \cdot 0,95}{0,934}$

$= \dfrac{437}{467}$

3) $X(\Omega) = \{0, 20, 50\}.$

$P(X=0) = P(\bar{F}) = 1 - 0,066$

$P(X=20) = p(F \cap \bar{S}) = \cancel{0,06}$

$0,08 \cdot 0,75 = 0,06.$

$p(X=50) = p(F \cap S) = 0,92 \cdot 0,95$

$= 0,872.$

x_i	0	20	50	$\sum_{i=1}^{3} p_i$
$p_i = p(X=i)$	0,066	0,06	0,874	1

b) La moyenne des bénéfices est $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i\,p_i$

$= 0 \cdot 0,066 + 20 \cdot 0,06 + 50 \cdot 0,874$

$= 44,900$ DT.

4) a) Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et

$p = p(F) = 0,934.$

$p(Y=k) = C_{15}^{k}(0,934)^{k}(1-0,934)^{15-k}$

$= C_{15}^{k}(0,934)^{k}(0,066)^{15-k}$

$\forall k \in \{0, 1, \ldots, 15\}.$

$E(Y) = n \cdot p = 15 \cdot 0,934 = 14,01$

$V(Y) = np(1-p) = 15 \cdot 0,934 \cdot 0,066$

$= 0,92466$

b) $p(A) = 1 - (0,066)^{15} \simeq 1$

Exercice 2 :

Partie A :

1) $f'(0) = -1,5$

$f'(-1) = 0$

$f'(-3) = 0$

2) $\forall x \in [-3, -1]$; $f'(x) \geq 0$

$\Rightarrow f$ est croissante sur $[-3, -1]$

Cette condition n'est vérifiée que pour la courbe $\mathcal{C}_1$

Ainsi $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_1$.

Partie B :

1) a) $f'(x) = 2ax + \dfrac{b}{x+4}$

$\forall x \in]-4, +\infty[$

b) $f'(0) = -1,5$ eq $\dfrac{b}{4} = -1,5$

$b = -6$

$f'(-1) = 0$ eq $-2a + \dfrac{b}{3} = 0$

eq $-2 = 2$ eq $a = -1$

2) $I = \int_{-3}^{-1} f'(x)\,dx = [f(x)]_{-3}^{-1}$

$= f(-1) - f(-3)$

$= -1 - 6\ln 3 - (-9 - 6\ln(1))$

$= -1 - 6\ln 3 + 9 = 8 - 6\ln 3.$

b) f est continue et positive sur $[-3,-1]$ donc I est l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par Γ, l'axe des abscisses et les droites d'éq $x=-3$ et $x=-1$

Exercice 3 :

1) a) $2a^2-(3+i\sqrt3)a^2+(1+i\sqrt3)a^2$
$= 2a^2-3a^2-i\sqrt3a^2+a^2+i\sqrt3a^2$
$= 0$

donc a est une racine d(E)

b) $a\cdot b = \frac{(1+i\sqrt3)a^2}{2}$

$b = \frac{1+i\sqrt3}{2}a$

c) $\frac{1+i\sqrt3}{2} = \frac12+i\frac{\sqrt3}{2} = e^{i\pi/3}$

donc $b = a e^{i\pi/3}$

2) $OA = |a| = 1$

$OB = |b| = |e^{i\pi/3}||a| = 1$

$AB = |z_B - z_A| = |ae^{i\pi/3}-a|$
$= |a|\,|e^{i\pi/3}-1| = |e^{i\pi/3}-1|$
$= |e^{i\pi/6}(e^{i\pi/6}-e^{-i\pi/6})|$
$= |e^{i\pi/6}|\,|2i\sin\frac{\pi}{6}|$
$= 1\cdot 2\cdot\frac12 = 1$

Ainsi $OA = OB = AB = 1$

le triangle OAB est équilatéral

2ème méthode

$OA = OB = 1$ ①

$(\widehat{\vec{OA},\vec{OB}}) \equiv (\widehat{\vec{OA},\vec{u}})+(\widehat{\vec{u},\vec{OB}})[2\pi]$
$\equiv -\arg(a)+\arg(b)[2\pi]$
$\equiv -\arg(a)+\arg(ae^{i\pi/3})[2\pi]$
$\equiv -\arg(a)+\arg(a)+\arg(e^{i\pi/3})[2\pi]$
$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ②

① et ② donnent OAB est équilatéral

3) a) $\frac{\text{Aff}\,\vec{OC}}{\text{Aff}\,\vec{OD}} = \frac{\frac{3-i\sqrt3}{3}a}{\frac{-3+i\sqrt3}{6}a} = \frac{3-i\sqrt3}{3}\cdot\frac{6}{(-3+i\sqrt3)} = -2\in\mathbb{R}$

$\vec{OC}$ col $\vec{OD}$ donc O, C et D sont alignés

b) $\frac{\text{Aff}(\vec{OB})}{\text{Aff}(\vec{OD})} = \frac{\frac{1+i\sqrt3}{2}a}{\frac{-3+i\sqrt3}{6}a}$
$= \frac{(3+3i\sqrt3)(-3-i\sqrt3)}{9+3}$
$= \frac{-9-3i\sqrt3-9i\sqrt3+9}{12}$
$= \frac{-12i\sqrt3}{12} = -i\sqrt3$ imaginaire

$\vec{OB}\perp\vec{OD}$ donc $(OB)\perp(OD)$

c) $(OB)\perp(OD)$ et O, C et D sont alignés éq $[OB]$ est la hauteur issue de B dans le triangle BCD.

Ainsi Aire$(BCD) = \frac{DC\cdot OB}{2}$
$= \frac{DC\cdot 1}{2} = \frac{DC}{2}$ ①

$DC = |c-d| = |a|\left|\frac{3-i\sqrt3}{3}-\frac{-3+i\sqrt3}{6}\right|$
$= |1|\left|\frac{6-2i\sqrt3+3-i\sqrt3}{6}\right|$
$= \frac36|3-i\sqrt3|$
$= \frac12\sqrt{9+3} = \frac12\cdot2\sqrt3 = \sqrt3$ ②

① et ② donnent Aire$(BCD) = \frac{\sqrt3}{2}$

Exercice 4.

1) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1-e^x}}{x}$
$= \lim\limits_{x\to0^-} -\sqrt{\frac{1-e^x}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0^-} -\sqrt{\underbrace{\frac{-1}{x}}_{+\infty}\cdot\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{1}} = -\infty$.

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ donc

$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

donc f n'est pas dérivable à gauche en 0

$(\mathcal{C})$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de même sens et de même direction que le vecteur $\vec{j}$.

2) f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $\forall x \in]-\infty, 0[$

$$f'(x) = \frac{-e^x}{2\sqrt{1-e^x}} < 0$$

$\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$.

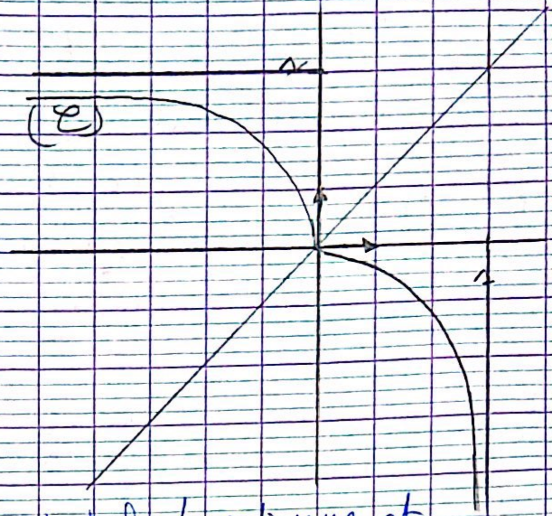
de plus $\lim_{-\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{1 - e^x} = 1$

$f(0) = 0$ et f n'est pas dérivable à gauche en 0

Ainsi on a :

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$-$	||
$f(x)$	1	$\searrow$	0

3) $\lim_{-\infty} f = 1 \Rightarrow$ la dte d'éqt $y = 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au $V(-\infty)$.



4) a) f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ donc f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ sur $f(]-\infty, 0]) = [f(0), \lim_{-\infty} f[= [0, 1[$

b) $\mathcal{C}_{f^{-1}} = S_\Delta(\mathcal{C})$ tq $\Delta : y = x$

5) a) $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in [0, 1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in]-\infty, 0] \end{cases}$

$f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{1 - e^y} = x \Leftrightarrow 1 - e^y = x^2$

$e^y = 1 - x^2$

$\Leftrightarrow y = \ln(1 - x^2)$

Ainsi, $f^{-1}(x) = \ln(1 - x^2)$ $\forall x \in [0, 1[$

b) $F(x) = (x - 1)\ln(1 - x) + (x + 1)\ln(1 + x) - 2x$ $\forall x \in [0, 1[$

les fonctions $x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto 1 + x$ sont dérivable et strictement positives sur $[0, 1[$ donc $x \mapsto \ln(1 + x)$ et $x \mapsto \ln(1 - x)$ sont dérivable sur $[0, 1[$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $[0,1[$.

Soit $x \in [0,1[$

$f'(x) = \ln(1-x) + (x-1)\frac{-1}{1-x}$

$+ \ln(1+x) + \frac{x+1}{1+x} - 2$

$= \ln(1-x) + 1 + \ln(1+x) + 1 - 2$

$= \ln(1-x) + \ln(1+x)$

$= \ln((1-x)(1+x))$

$= \ln(1-x^2) = f^{-1}(x)$.

d'où F est une primitive de f^{-1} sur $[0,1[$

c) f^{-1} et $x \mapsto -\ln(2)$ sont continues sur $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

$\Rightarrow A = \int_0^{\sqrt{2}/2} |f^{-1}(x) + \ln(2)| \, dx \; u.a.$

$= \int_0^{\sqrt{2}/2} f^{-1}(x) + \int_0^{\sqrt{2}/2} \ln(2)\, dx$

$= [F x]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \ln(2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \times$

$\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) - \frac{2\sqrt{2}}{2} + \ln 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \; (u.a)$

$= \frac{\sqrt{2}-2}{2} \ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}+2}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right) - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2$

$= \frac{\sqrt{2}-2}{2}\left(\ln(2-\sqrt{2}) - \ln 2\right) + \frac{\sqrt{2}+2}{2}\left(\ln(\sqrt{2}+2) - \ln 2\right) - \sqrt{2}$

$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 2$

...

d) $f(0) = 0$; $f(-\ln(2)) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{1-e^{x}}\, dx = \int_{-\ln 2}^{0} f(x)\, dx$

$= \mathcal{A}$ (par raison du symétrique / $\Delta : y = x$).

Exercice 1 :

Deux éleveurs d'oiseaux possèdent des oiseaux rares . La couleur de chaque oiseau apparait au bout d'un mois de l'éclosion de l'œuf . Entre le 1er jour et un mois de l'éclosion , on a constaté que :

Pour le 1er éleveur :
* 20 % des oiseaux meurent .
* 70 % des oiseaux deviennent colorés .
* 10 % des oiseaux deviennnent blancs .

Pour le 2ème éleveur :
* 7 % des oiseaux meurent .
* 80 % des oiseaux deviennent colorés .
* 13 % des oiseaux deviennnent blancs .

Un commerçant d'oiseaux achète des oiseaux âgés tous d'un jour de ces deux éleveurs : 70 % des oiseaux sont achetés du 1er éleveur et 30 % des oiseaux sont achetés du 2ème éleveur .

1) Une épreuve consiste à choisir au hasard un oiseau acheté . On considère les évenements suivants :

E_1 : « L'oiseau choisi provient du 1er éleveur » .

E_2 : « L'oiseau choisi provient du 2ème éleveur » .

V : « L'oiseau choisi va rester vivant au bout d'un mois de l'éclosion de l'oeuf » .

C : « L'oiseau choisi sera coloré au bout d'un mois de l'éclosion de l'oeuf » .

B : « L'oiseau choisi sera blanc au bout d'un mois de l'éclosion de l'oeuf » .

a) Justifier que $p(V) = 0{,}839$.

b) Calculer $p(C)$.

c) Après un mois de l'éclosion des œufs , l'oiseau choisi est devenu blanc .
Calculer la probabilité qu'il provient du 1er éleveur .

d) Le commerçant décide de ne vendre les oiseaux achetés qu'après un mois d'âge .
Ainsi , si un oiseau sera coloré alors le commerçant gagne λ dinars et s'il sera blanc alors le commerçant gagne 50 dinars . Mais si l'oiseau sera mort alors le commerçant perd 10 dinars .
Soit X la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du commerçant pour un oiseau .

i) Donner la loi de probabilité de X .

ii) Déterminer λ pour que le commerçant gagne en moyenne 223 dinars par oiseau .

2) On répète l'épreuve précédente , de la question 1) , n fois de suite de façons indépendentes .
On désigne par Y la variable aléatoire qui donne le nombre d'oiseaux qui vont devenir blancs , au bout d'un mois de l'éclosion des œufs , parmi les n oiseaux choisis .
On considère l'énenement suivant :

G_n : « Parmi les n oiseaux choisis , il y a au moins un oiseau qui sera blanc au bout d'un mois » .

i) Justifier que $p(G_n) = 1-(0{,}891)^n$.

ii) Dans l'annexe (1) , on a tracé la représentation graphique (C) de la fonction $\varphi : x \mapsto e^{x\ln(0{,}891)}$ selon un repère du plan . Exploiter (C) pour déterminer le nombre minimal d'oiseaux choisis pour qu'il y ait plus de 70 % de chance d'avoir au moins un oiseau qui sera blanc parmi ces n oiseaux .

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f selon un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Justifier que f est impaire .

b) Vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f .

2) a) Ecrire une équation de la tangente Δ à (C) au point d'abscisse 0 .

b) Vérifier que pour tout réel x , $f'(x)-1 = -f^2(x)$.

c) Déduire la position relative de (C) et Δ sur $[0\,;+\infty[$.

3) a) Soit t un réel positif. Vérifier que $e^t \geq 1$ puis déduire que pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, $e^x \geq x+1$.

b) Montrer alors que pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) \geq \dfrac{x}{x+1}$.

4) Dans l'annexe **(2)** , on a tracé sur $[0\,;+\infty[$, la courbe $(\Gamma): y = \dfrac{x}{x+1}$ selon le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Tracer , dans l'annexe **(2)** , Δ et $(\mathbf{C})$.

b) Soit $\lambda > 0$. On désigne par $\mathbf{A}(\lambda)$ l'aire , en (ua), de la partie du plan limitée par $(\mathbf{C})$, (Γ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

Exprimer $\mathbf{A}(\lambda)$ en fonction de λ puis calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathbf{A}(\lambda)$.

Exercice 3 :

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis.

On sait que 30% des membres de cette association adhèrent à la section tennis. Soit les événements suivants :

F : « le membre choisi est une femme » et T : « le membre choisi adhère à la section tennis » .

A) 1) a) Déterminer $p(T)$, $p(T/F)$ et $p(T/\overline{F})$.

b) Montrer que $3p(F) + 4p(\overline{F}) = 3{,}6$.

c) Calculer alors $p(F)$.

2) On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.

Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme.

B) Pour financer une sortie , l'association organise un jeu en utilisant une urne contenant dix boules indiscernables au toucher dont une est noire et neuf sont blanches ; et un dé cubique équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 . Le jeu consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne , ensuite lancer le dé :

*) Si la boule noire est tirée alors le jeu et gagnant si un numéro pair apparait sur la face supérieure du dé .

*) Si la boule noire n'est pas tirée , alors le jeu est gagnant si le numéro 6 apparait sur la face supérieure du dé .

On considère les événements suivants :

N : « La boule noire figure dans le tirage » et G : « Le jeu est gagnant » .

1) a) Calculer $p(N)$.

b) Montrer que $p(G) = \dfrac{7}{30}$.

2) Pour participer à ce jeu , le joueur doit mettre 50 dinars au départ .

*) Lorsque le jeu est gagnant , le joueur reçoit 100 dinars .

*) Lorsque le jeu n'est pas gagnant et la boule noire est tirée , alors le joueur récupère sa mise.

*) Lorsque le jeu n'est pas gagnant et la boule noire n'est pas tirée , alors le joueur perd sa mise.

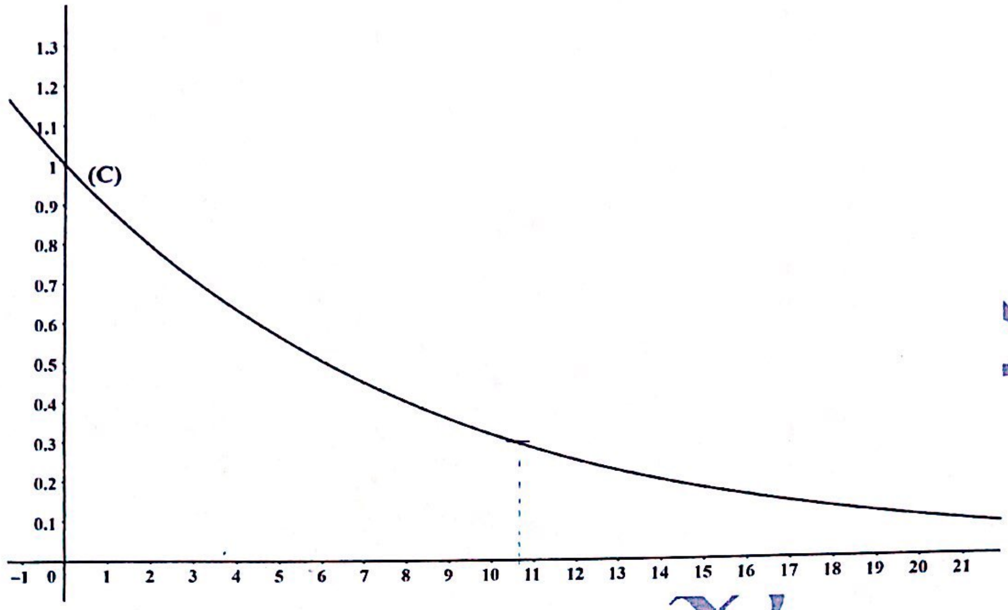
Soit X la variable aléatoire qui , à chaque épreuve , associe le gain algébrique de l'association .

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

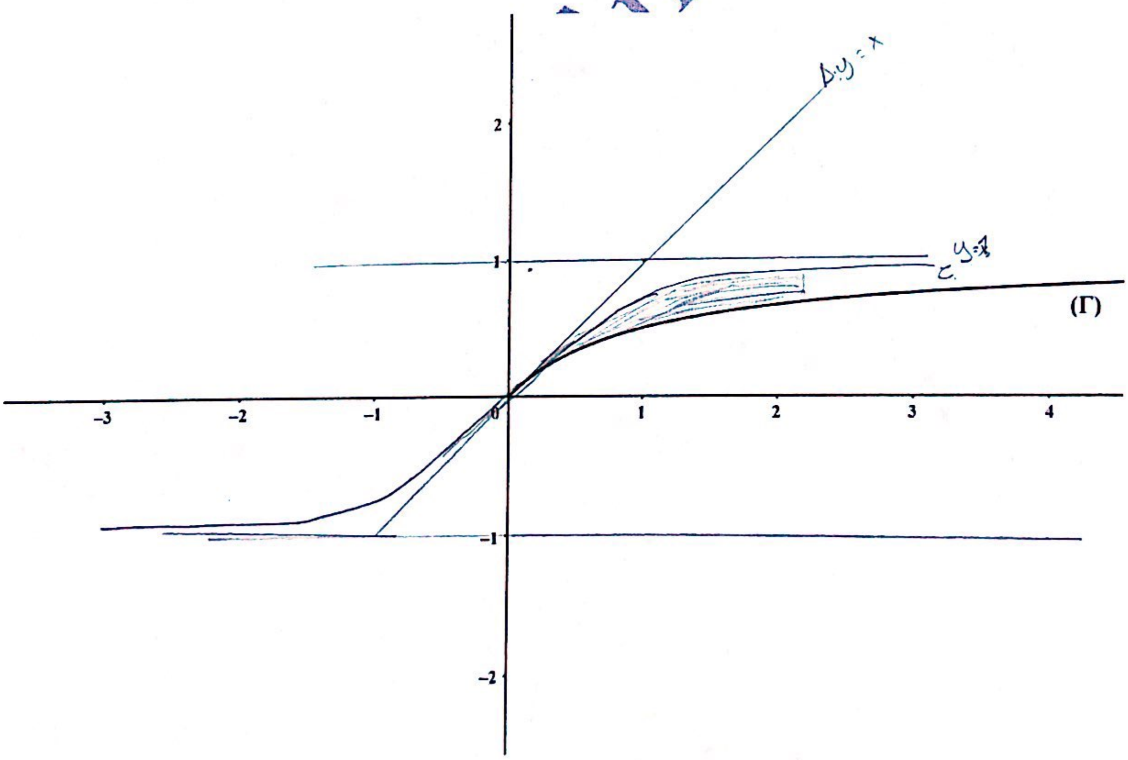
b) Calculer l'espérance mathématique de X .

c) Déterminer le nombre minimal de participants à ce jeu pour que l'estimation moyenne des gains par l'association soit supérieure à 1500 dinars .

Annexe (1)



Annexe (2)



Exercice 3 :

A/ 1) a) $p(T) = 0,3$

$p(T/F) = \frac{1}{4}$

$p(T/\bar{F}) = \frac{1}{3}$

b) $p(T) = p(T \cap F) + p(T \cap \bar{F})$

$0,3 = p(T/F) \cdot p(F) + p(T/\bar{F}) \cdot p(\bar{F})$

$0,3 = \frac{1}{4} p(F) + \frac{1}{3} p(\bar{F})$

$0,3 \cdot 12 = 3 p(F) + 4 p(\bar{F})$

$3,6 = 3 p(F) + 4 p(\bar{F})$

c) $3,6 = 3 p(F) + 4 (1 - p(F))$

$3,6 = 3 p(F) + 4 - 4 p(F)$

$p(F) = 4 - 3,6 = 0,4$

2) $p(F/T) = \frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{p(T/F) \cdot p(F)}{p(T)}$

$= \frac{\frac{1}{4} \cdot 0,4}{0,3} = \frac{1}{3}$

B/ 1) a) $p(N) = \frac{C_1^1 \cdot C_9^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$

$p(G) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{30}$

2) $X(\Omega) \in \{0, -50, 50\}$

a) $P(X=0) = P(\bar{G}/N) \cdot P(N)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$

$P(X=50) = \frac{7}{30}$

$P(X=-50) = P(\bar{G}/\bar{N}) \cdot P(\bar{N})$

$= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

b) $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{10} + \frac{7}{30} \cdot -50 + \frac{2}{3} \cdot 50$

$= \frac{65}{3} \simeq 21,6$ DT

c) Soit N le nombre de joueurs à ce ~~jo~~ jeu.

$n \cdot E(X) > 1500$ succès

$n > \frac{1500}{E(X)} \simeq 69,2$

Ainsi le nombre minimale de joueur est 70 joueurs.

Exercice 1 :

1) a) $p(V) = p(V \cap E_1) + p(V \cap E_2)$

$= p(V/E_1) \cdot p(E_1) + p(V/E_2) \cdot p(E_2)$

$= 0,8 \cdot 0,7 + 0,93 \cdot 0,3$

$= 0,839$

b) $p(C) = p(V) - p(B)$

$= 0,839 - [0,1 \cdot 0,7 + 0,13 \cdot 0,3]$

$= 0,839 - 0,109 = 0,73$

c) $P(E_1/B) = \frac{P(E_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B/E_1) P(E_1)}{P(B)}$

$= \frac{0,1 \cdot 0,7}{0,109} = \frac{70}{109}$

d) i) $X(\Omega) = \{-10, 50, d\}$

$P(X=-10) = P(\bar{V}) = 1 - 0,839$

$= 0,161$

$P(X=50) = P(B) = 0,109$

$P(X=d) = P(C) = 0,73$

ii) $E(X) = 223$ eq.

$-10 \cdot 0,161 + 50 \cdot 0,109 + 0,73 d$

$d = \frac{219,16}{0,730} = 300$ dt.

2) i) $P(G_n) = 1 - (1 - P(B))^n$

$P(G_n) = 1 - (1 - 0,109)^n$

$= 1 - (0,891)^n$

2ème méthode

Y suit la loi ~~B~~ binomiale de paramètre n et $p = p(B)$

$= 0,109$

$P(Y=k) = C_n^k (0,109)^k (0,891)^{n-k}$

avec $k \in \{0, 1, \dots, n\}$

$P(G_n) = 1 - [P(Y=0)]$

$= 1 - (0,891)^n \ (k=0)$

$a = e$

2) iii) $f(x) = e^{x\ln(0,891)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$p(G_n) > 0,7$ éq

$1 - (0,891)^n > 0,7$ éq

$(0,891)^n < 0,3$ éq

$\ln(0,891)^n < \ln(0,3)$ éq

$n\ln(0,891) < \ln(0,3)$ éq

$e^{n\ln(0,891)} < e^{\ln 0,3}$

$f(n) < 0,3$

On trace la droite d'éqt $y = 0,3$

Ainsi, le nombre minimal d'oiseaux choisis est 11.

Remarque $\int \tan(t)\,dt = \int -\frac{-\sin}{\cos}\,dt = -\ln|\cos t|$.

Remarque

- $\int_a^b \frac{x}{x+1}\,dx = \int_a^b \frac{(x+1)-1}{x+1}\,dx$
  $= \int_a^b 1 - \frac{1}{x+1}\,dx$
  $[x - \ln|x+1|]_a^b$ ...
- $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,dx = \int \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$
  $= \int \frac{e^{-x}(e^{x} - e^{-x})}{e^{-x}(e^{x} + e^{-x})} = \left[\ln|e^{x} + e^{-x}|\right]_a^b$

$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{2}\ln^2 x \quad \left(\int \frac{1}{x}\ln x\,dx\right)$