

# HKPIS 223



Parlons des  
exponentielles

[Abaitefo.com](http://Abaitefo.com)

une vie sans souffrance n'a pas d'histoire

**Situation 1 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$   $f(x) = xe^{-x^2}$

1. a) Montrer que,  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2x^2}{e^{2x^2}}}$   
b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$  et interpréter le résultat.  
c) Étudier la parité de  $f$  et en déduire  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) Déterminer la dérivée de la fonction  $f$ , puis dresser son tableau de variation.
- 3) Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$ .

**Situation 2 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (3 - 8x)e^{-2x}$ . On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Étudier les variations de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variation.
- 2) Déterminer l'équation de la tangente à  $(C)$  en  $O$ .
- 3) Pour quelles valeurs de  $x$ ,  $(C)$  admet-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

**Situation 3 :**

Une brioche qui était dans une étuve à  $30^\circ C$  est placée dans un four chauffé à  $180^\circ C$  pendant  $35 \text{ min}$ .

La température au cœur de la brioche, exprimée en degré Celsius est donnée sur l'intervalle  $[0; 35]$  par une fonction du temps  $t$  exprimé en minutes de la forme  $f(t) = ae^{-0,022t} + 180$ .

- 1) Sachant que  $f(0) = 30$  déterminer la valeur de  $a$
2. a) Justifier que  $f'(t) = 3,3e^{-0,022t}$  pour tout  $t$  de  $[0; 35]$ .  
b) En déduire les variations de  $f$  sur  $[0; 35]$   
c) Interpréter ce tableau de variation dans le contexte de l'exercice.
- 3) à l'aide d'une calculatrice, déterminer le temps nécessaire, en minutes pour que la température au cœur de la brioche soit supérieure à  $100^\circ C$ .

**Situation 4 :**

**Partie 1**

On étudie l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours. On décide de modéliser cette croissance par la fonction  $h$  du type :  $h(t) = \frac{a}{1+be^{-0,04t}}$ . Où  $h(t)$  désigne la hauteur du plant, en mètres,  $a$  et  $b$  des réel positifs et  $t$  le temps en jours. Initialement, le plant mesure  $0,1 \text{ m}$  et sa hauteur tend vers une hauteur limite de  $2 \text{ m}$ .

Déterminer  $a$  et  $b$  pour que la fonction  $h$  corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

**Partie 2**

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction  $f$  définie sur  $[0; 250]$  par :

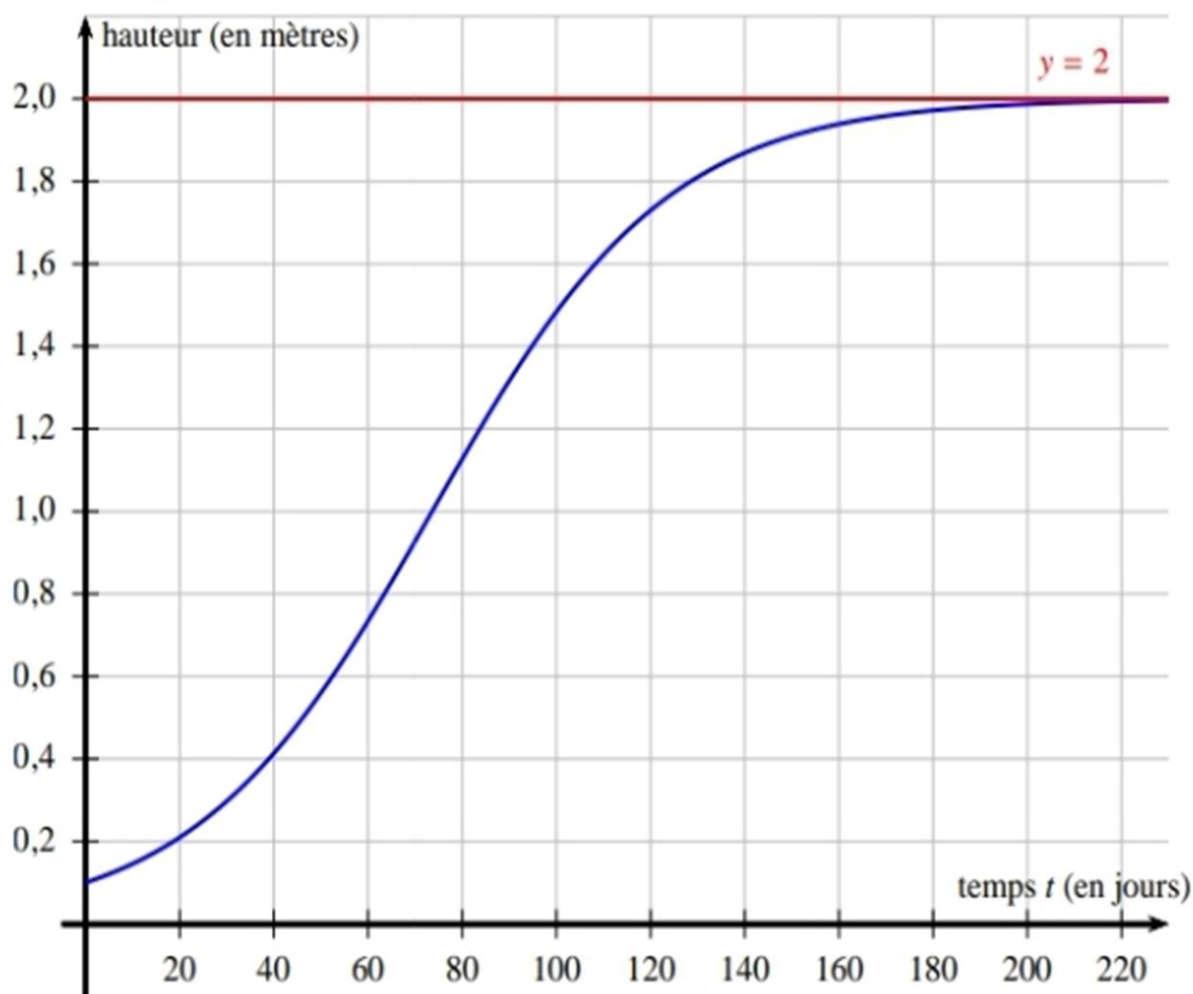
$$f(t) = \frac{2}{1 + 19e^{-0,04t}}$$

- 1) Déterminer  $f'(t)$  en fonction de  $t$ . En déduire les variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 250]$ .

2) A l'aide d'un algorithme, donner, au jour près, le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

3) On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de  $t_0$ . En utilisant le graphique donné ci-dessous, déterminer une valeur approchée de  $t_0$ . Estimer alors la hauteur du plant.

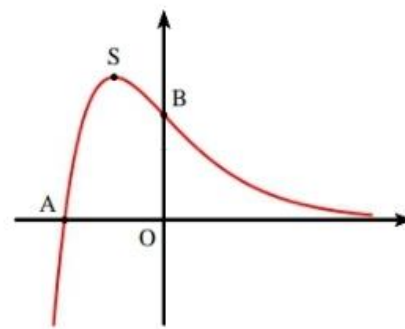


**Situation 5 :**

A) La courbe  $C_f$  représente une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ . Où  $a$  et  $b$  sont deux réels.

1)  $C_f$  passe par les points  $A(-2; 0)$  et  $B(0; 2)$ . Déterminer  $a$  et  $b$ .

2) En déduire les coordonnées du sommet  $S$ .



**Situation 6 :**

Soit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 8(e^{-x} - e^{-2x})$

1) a- Démontre que pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) = \frac{8(e^x - 1)}{e^{2x}}$ .

b- Démontre que pour tout réel  $x$ , on a :  $f'(x) = \frac{8(2 - e^x)}{e^{2x}}$ . En déduis le signe de  $f'(x)$ .

c - Détermine les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .

d - Dresse le tableau de variation de  $f$  sur son ensemble de définition.

e - Représente la fonction  $f$  dans un repère orthogonal. (Unités : 4 cm sur  $ox$  et 2 cm sur  $oy$ )

2) On injecte à l'instant  $t = 0$  une substance dans le sang d'un animal. A l'instant  $t$  où  $t$  est positif et exprimer en seconde, la concentration  $g$  de la substance injectée est :  $g(t) = 8(e^{-t} - e^{-2t})$ . On rappelle que la «concentration» est le rapport entre la quantité du liquide et la quantité du sang qui le contient.

a- En utilisant les résultats de la question 1), Donne le tableau de variation de la concentration du sang en fonction du temps  $t$ .

b- Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ?

On Donnera une valeur approchée par défaut de ce résultat en centime de secondes.

c- Détermine les instants  $t_1$  et  $t_2$  pour lesquels la concentration est égale au quart de sa valeur maximale.

**Situation 7 :**

On étudie l'évolution d'une colonie de bactéries placée dans une pétrie. Le nombre de bactéries en centaines est modélisé par la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(t) = \frac{4e^t - 1}{e^t + 2}$  où  $t$  représente le temps en heures. On suppose que l'on peut compter le nombre de bactéries à l'unité près grâce à un compteur de radioactivité.

1. a) Calcule  $f(0)$  et interpréter ce résultat.

b) Montre que  $f(t) = 4 - \frac{9}{e^t + 1}$ . En déduis la limite de  $f$  en  $+\infty$

On appelle cette valeur, la saturation. Que peut-on en conclure pour la courbe  $(C)$  de  $f$ ?

c) L'équation  $f(t) = 4$  admet-elle des solutions ? Justifier la réponse.

2. Montre que la dérivée  $f'$  de  $f$  vérifie  $f'(t) = \frac{9e^t}{(e^t + 2)^2}$ . En déduis le tableau de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$

3. Soit  $(T)$  la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe  $(C)$ . Détermine une équation de  $(T)$ .

4. Recopie et complète le tableau ci-dessous en arrondissant à  $10^{-2}$  près.

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$								

5) Trace  $(C)$ ,  $(T)$  ainsi que toutes les asymptotes éventuelles à  $(C)$ .

6) Calcule à la minute près l'instant  $t_0$  où le nombre de bactéries sera égal à 200

7) Détermine le temps au bout duquel la population de cette colonie serait égale à 80% de sa saturation.

**Situation 8**

**Partie A**

A l'instant  $t = 0$  on injecte dans le sang d'un patient une dose de 3ml d'un médicament. On veut étudier le processus d'élimination du produit au cours des douze heures suivant l'injection. La quantité de médicament présente dans le sang en ml en fonction du temps  $t$  en heures est  $f(t)$ , où  $f$  est définie sur  $[0; 12]$  par :

$$f(t) = 3e^{-0,1t}$$

1) Déterminez  $f'(t)$  et justifier que pour tout  $t \in [0; 12]$ ,  $f'(t) < 0$ .

2) Dressez le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; 12]$ .

3) Calcule  $f(2)$ ;  $f(3)$ ;  $f(4)$ ;  $f(6)$  et  $f(8)$ . Que représente chacune de ces valeurs ?

4) Trace la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques (1cm sur (OI) et 4 cm sur (Oy)).

### Partie B

Le médicament est inefficace lorsque la quantité contenue dans le sang est inférieure à 1,25 ml, ainsi on procède à une seconde injection

1°/ Au bout de combien de temps on procèdera à la seconde injection ? (On Déterminera ce temps graphiquement et par calcul).

2°/ On rappelle que le seuil de toxicité du médicament est de 4,5ml. Le patient court-il un risque d'intoxication par le médicament à la seconde injection ?

### Problème 1

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[-\infty; +\infty]$ , par :  $x \mapsto f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$  et on note  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2cm.

- 1) Calcule les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
- 2) Démontre que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = 2x + 1$  est asymptote à  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  puis précise la position relative de  $(C_f)$  et  $(\Delta)$
- 3) a) Étudie les variations de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ .  
b) Calcule  $f'(1)$  puis en déduis le signe de  $f'(x)$  sur  $]-\infty; +\infty[$   
c) Dresse le tableau de variations de  $f$
- 4) Démontre que l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $1,9 < \alpha < 2$  et  $-0,6 < \beta < -0,5$
- 5) Calcule la limite de  $\frac{f(x)}{x}$  en  $+\infty$  puis donne une interprétation géométrique.
- 6) Trace  $(C_f)$  et  $(\Delta)$

### Problème 2 :

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (x + 1)^2 e^{-x}$ . On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Unité graphique : 1cm

- 1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) Montre que  $f$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  vers un intervalle  $J$  à préciser.  
) Trouve l'équation de la tangente  $(T)$  au point d'abscisse nulle.
- 4) Trouve les coordonnées des points d'intersections de la courbe  $(C_f)$  avec les axes du repère.
- 5) Trace la courbe  $(C_f)$  et la tangente  $(T)$  dans le même repère.
- 6) Soit  $F$  la fonction définie par :  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ . Où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels.  
a) Détermine les réels  $a, b$  et  $c$  pour que  $F$  soit une primitive de  $f$ .  
b) Calcule en  $\text{cm}^2$  l'aire de la partie du plan délimité par la courbe  $(C_f)$ , la tangente  $(T)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 2$ .

### Problème 3 :

A) 1) Résoudre l'équation différentielle :  $4y'' + y = 0$ .

2) Déterminer la solution particulière  $f$  dont la courbe représentative  $(C)$  passe par le point  $\Omega(0; 1)$  et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation  $y = x$ .

B) 1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = 1 - 2x + e^{2x}$

a) Étudier les variations de la fonction  $g$ .

b) En déduire le signe de  $g(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x + 2 + xe^{-2x}$ ,  $(C)$  sa courbe représentative dans le repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité graphique est  $2cm$  sur  $(ox)$  et  $1cm$  sur  $(oy)$ ).

a) Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

b) Démontrer que la droite  $(\Delta) y = x + 2$  est asymptote à  $(C)$  en  $+\infty$ .

c) Étudier la position relative de  $(C)$  et  $(\Delta)$ .

d) Calculer  $f(x)$  et montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{2x}}$  puis dresser le tableau de variation de  $f$ .

e) Tracer  $(C)$  et  $(\Delta)$ .

3) Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  définie par  $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})e^{-2x}$

a) Prouver que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Calculer en  $cm^2$  l'aire  $A(D)$  de la partie  $D$  du plan limité par  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ .

#### Problème 4

##### Partie A :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = |x(x - 1)|$ .

1) Exprimer  $f(x)$  sans le symbole de la valeur absolue.

2) Étudier la dérivabilité de  $f$  aux points d'abscisses  $0$  et  $1$ .

3) Étudier les variations de  $f$ .

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , construire la représentation graphique de  $(\Gamma)$  et les demi-tangentes aux points d'abscisses  $0$  et  $1$ .

##### Partie B :

On considère la fonction  $g$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{2x} - 2e^x$ .

1) Étudier le sens de variation de  $g$

2) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_g)$  au point d'abscisse  $x_0 = -\ln 2$ .

3) Soit  $h$  la fonction définie par :  $h(x) = g(x) + \frac{1}{2}(x + \ln 2) + \frac{3}{4}$

Calculer  $h'(x)$  et déduire de  $h'(x)$  le signe de  $h(x)$ .

4) Tracer  $(C_g)$  et  $(T)$  dans un repère différent de celui utilisé pour  $(\Gamma)$  et déterminer leurs positions relatives.

#### Problème 5 :

##### Partie A :

1) On considère l'équation différentielle  $(E)$  :  $y'' - y = 4xe^x$ , déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que la fonction définie par  $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$  soit solution de  $(E)$ .

- 2) Vérifier qu'une fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  est solution de  $(E)$  équivaut à  $(f - g)$  est solution de l'équation  $(E')$ :  $y'' - y = 0$ .
- 3) Résoudre  $(E')$  puis en déduire la solution générale de  $(E)$ .
- 4) Déterminer la solution de  $(E)$  telle que :  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 1$

### Partie B :

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$  de courbe représentative  $(C)$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité 2cm).

- 1) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$  puis interpréter graphiquement ce résultat.
- 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement les résultats.
- 3) a- Calculer la fonction dérivée de  $f$ .  
b- Étudier le sens de variation  $f$  puis dresser son tableau de variation
- 4) Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1.
- 5) Tracer  $(T)$  et  $(C)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
- 6) En utilisant deux intégrations par parties successives, déterminer l'aire de la partie  $\mathcal{A}$  du plan délimitée par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

### Partie C

Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0; +\infty[$

- 1- Démontrer que  $g$  réalise une bijection de  $[0; +\infty[$  sur un intervalle  $K$  à déterminer
- 2- On note  $g^{-1}$  la bijection réciproque de  $g$  et  $(C')$  sa courbe représentative dans le même repère orthonormé  $(O, I, J)$  Démontrer que  $g^{-1}$  est dérivable en  $e$  et calculer  $(g^{-1})'(e)$
- 3- Déterminer une équation de la tangente  $(D)$  à  $(C')$  au point d'abscisse  $e$
- 4- Construire  $(D)$  et  $(C')$
- 5- Soit  $\mathcal{B}$  la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe  $(C')$  et la droite d'équation  $x = e$ . Déterminer l'aire de  $\mathcal{B}$  (On pourra utiliser la symétrie par rapport à la première bissectrice et le résultat de la question B-6)

### Problème 6

On considère les fonctions numériques  $f_m$  de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = e^{x-1} - mx$ , où  $m$  est un paramètre réel. On désigne par  $(C_m)$  la courbe représentative de  $f_m$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité 2cm)

- 1) Montrer que toutes les courbes  $(C_m)$  passent par un point fixe  $A$  dont on déterminera les coordonnées.
- 2) Montrer que la droite  $(\Delta_m)$  d'équation :  $y = -mx$  est une asymptote à la courbe  $(C_m)$  et déterminer la position de cette droite par rapport à  $(C_m)$ .
- 3) Étudier la fonction  $f_1$  et tracer avec soin la courbe  $(C_1)$  dans un repère.
- 4) Soit  $g_1$  la restriction de  $f_1$  à  $[1; +\infty[$ . Montrer que  $g_1$  admet une réciproque  $(g_1)^{-1}$ . Représenter la courbe de  $(g_1)^{-1}$ .

5) Calculer en  $cm^2$  l'aire  $A(\alpha)$  de la portion du plan limitée par  $(C_1)$ , la droite  $\Delta_1: u = -x$ , et les droites d'équations respectives :  $x = 1$  et  $x = \alpha$ . ( $\alpha < 1$ ).

### Problème 7

#### Partie A

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $x \mapsto 2xe^x - 1$

1- Déterminer l'ensemble de définition  $D_g$  de  $g$ , puis calculer les limites de  $g$  en  $-\infty$  et  $+\infty$

2- Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g'(x) = 2(x + 1)e^x$

3- Déterminer le sens de variation de  $g$ , puis dresser son tableau de variation

4- a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .

b) Vérifier que :  $0,35 < \alpha < 0,36$

5- Justifier que :  $\begin{cases} \text{pour tout } x \in ]-\infty; \alpha[, & g(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in ]\alpha; +\infty[, & g(x) > 0 \end{cases}$

#### Partie B

On considère la fonction numérique  $f$  définie comme suit :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto xe^x(xe^x - 1)$$

$(C_f)$  désignera la courbe représentative de  $f$  et le plan sera rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Unité graphique : 6 cm

1- Justifier que la droite des abscisses est une asymptote à  $(C_f)$  en  $-\infty$

2- Calculer la limite de  $f(x)$  et de  $\frac{f(x)}{x}$  en  $+\infty$ . Donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

3- Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = (x + 1)e^x g(x)$

4- a) Étudier le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ , puis donner les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

b) Justifier que  $f(\alpha) = -\frac{1}{4}$

5- Dresser le tableau de variation de  $f$

6- a) Calculer  $f(0)$

b) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\beta \in ]0; +\infty[$

c) Vérifier que  $0,56 < \beta < 0,57$

7- Déterminer le signe de  $f(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

8- Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0.

9- Construire dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la tangente  $(T)$  et la courbe  $(C_f)$ .

#### Partie C

Soit  $\lambda$  un nombre réel tel que  $\lambda < -1$  et la fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x}(x^2 - x + \frac{1}{2})$$

1- Justifier que  $h$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $x \mapsto x^2e^{2x}$

Calculer, à l'aide d'une intégration par partie, l'intégrale  $\int_{\lambda}^{-1} x^2e^{2x} dx$

2- a) Soit  $A(\lambda)$  l'aire de la partie du plan limitée par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses, et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = \lambda$ . Calculer  $A(\lambda)$

b) Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$ .

### Problème 8

#### Partie A

Soit la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = e^x + x + 1$

- 1- Déterminer les limites de  $\varphi$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
- 2- Étudier les variations de  $\varphi$
- 3- Dresser le tableau de variation de  $\varphi$
- 4- Montrer que l'équation  $\varphi(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  telle que  $-1,28 < \alpha < -1,27$
- 5- Montrer que : 
$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in ]-\infty; \alpha[, \varphi(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in ]\alpha; +\infty[, \varphi(x) > 0 \end{cases}$$

#### Partie B

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Unité graphique : 4 cm

- 1- a) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$ ,  
b) En déduire la sens de variation de  $f$
- 2- Montrer que  $f(\alpha) = \alpha + 1$
- 3- a) Soit  $(T)$  la tangente à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0. Donner une équation de  $(T)$   
b) Étudier la position relative de  $(C)$  par rapport à  $(T)$
- 4- Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
- 5- a) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est une asymptote à la courbe  $(C)$  en  $+\infty$   
b) Étudier la position relative de  $(C)$  par rapport à  $(D)$
- 6- Dresser le tableau de variation de  $f$
- 7- Construire les droites  $(T)$ ,  $(D)$  et la courbe  $(C)$

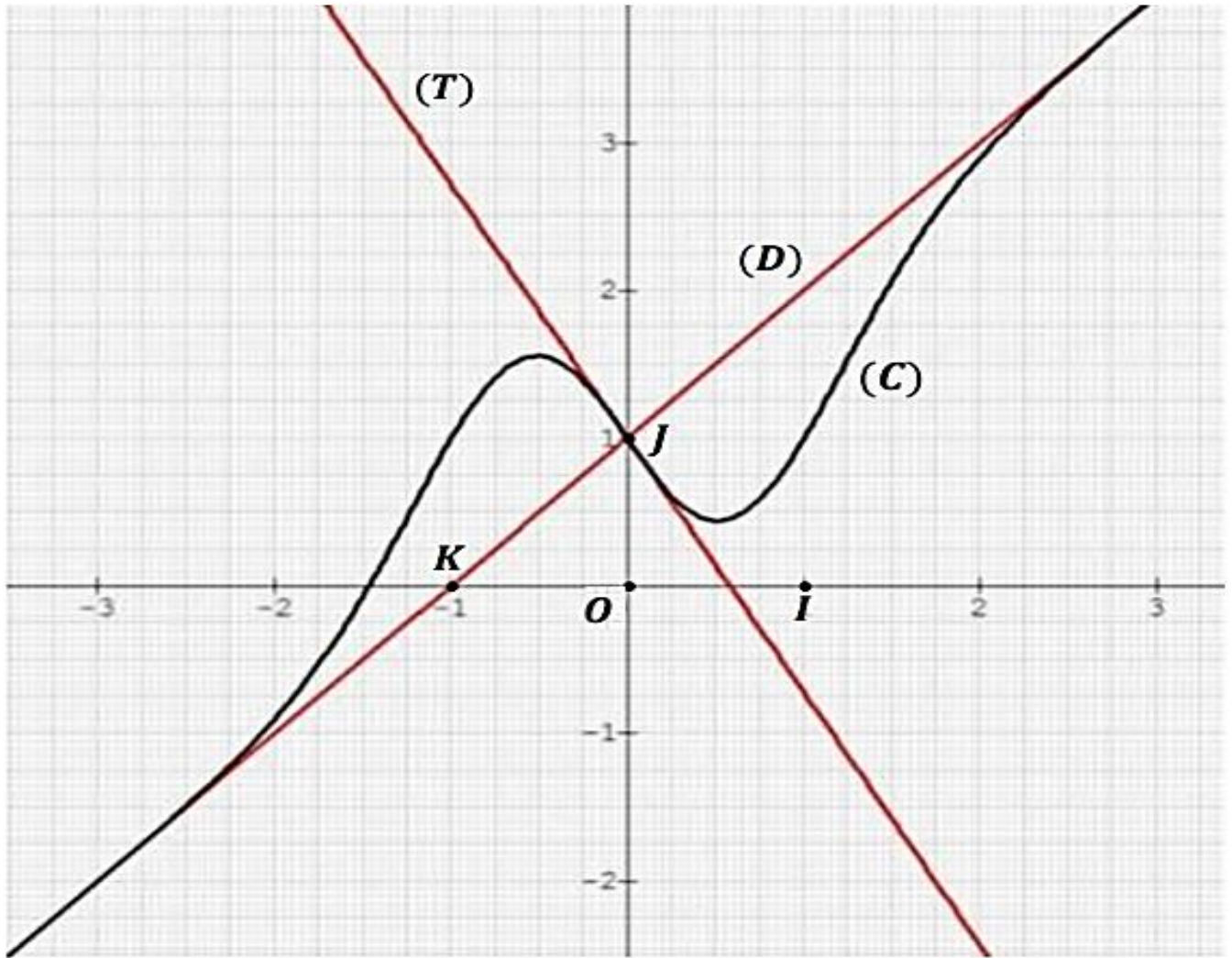
### Problème 9

#### Partie A

Le plan est muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 4 cm

On considère ci-dessous la courbe  $(C)$  d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , son asymptote  $(D)$  et sa tangente  $(T)$  au point d'abscisse 0. On sait que :

- Le point  $J(0,1)$  est le centre de symétrie de la courbe
- L'asymptote  $(D)$  passe par les points  $k(-1; 0)$  et  $J$
- La tangente  $(T)$  a pour équation  $y = (1 - e)x + 1$



- 1) Déterminer une équation de la droite (D)
- 2) On suppose qu'il existe deux nombres réels  $\alpha$  et  $\beta$   
et une fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = \alpha x + \beta + g(x)$ 
  - a- Déterminer les réels  $\alpha$  et  $\beta$
  - b- Démontrer que, pour tout réel  $x$ , on a :  $f(x) - f(-x) = 2$
  - c- En déduire que la fonction  $g$  est impaire, puis que la dérivée  $f'$  de la fonction est paire
- 3) On suppose maintenant que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; g(x) = (ax + b)e^{-x^2}$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels.
  - a- En utilisant la relation  $g(-x) = -g(x)$ , déterminer le réel  $b$
  - b- Justifier que  $g'(0) = -e$  et en déduire la valeur du réel  $a$

### Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 + x - xe^{-x^2+1}$

- 1) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) a- Démontrer que pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$ 
  - b- Calculer  $f'(0)$  et en déduire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0
- 3) Le graphique de la courbe (C) suggère l'existence d'un minimum relatif de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 1]$

- a- Calculer la dérivée  $f''$  de  $f'$ , étudier son signe sur  $[0; 1]$  et dresser le tableau de variation de  $f'$  sur  $[0; 1]$
- b- Démontrer que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  sur  $[0; 1]$
- c- Justifier que  $0,51 < \alpha < 0,52$
- d- Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Problème 10

Soit la fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$

(C) désigne sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
- 2) a) Prouver que la droite  $(\Delta_1)$  d'équation :  $y = x + 2$  est asymptote à (C) en  $-\infty$ .  
b) Préciser la position de (C) par rapport à  $(\Delta_1)$ .
- 3) a) Justifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $f(x) = x - 2 + \frac{4}{1 + e^x}$   
b) En déduire que la droite  $(\Delta_2)$  d'équation :  $y = x + 2$  est asymptote à la courbe (C) en  $+\infty$ .  
c) Préciser la position de (C) par rapport à  $(\Delta_2)$ .
- 4) a) Prouver que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$   
b) Étudier le signe de  $f'(x)$ . En déduire le sens de variation de  $f$ . Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 5) Tracer les droites  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$ , puis la courbe en précisant sa tangente au point d'abscisse 0.
- 6) Déterminer l'ensemble des primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Problème 11

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (x + 2)e^{-x}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- 1) Déterminer la limite de  $f(x)$  en  $-\infty$  puis en  $+\infty$ . Interpréter graphiquement ces résultats.
- 2) a- Établir que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = -(x + 1)e^{-x}$ , en déduire le signe de  $f'(x)$  puis le tableau de variation de  $f$   
b- Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.  
c- Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (Unité 2cm).
- 3) Démontrer que l'équation  $f(x) = 2$  a deux solutions distinctes sur  $[-2; 4]$ .
- 4) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ .  
a) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  pour que  $g$  soit une primitive de  $f$ .  
b) Calculer en unité d'aire la valeur exacte de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations :  $x = -2$  et  $x = 4$  donner une valeur approchée de l'aire à  $10^{-2}$  près par défaut en  $\text{cm}^2$ .

### Problème 12

**Partie A :** Résolution de l'équation différentielle  $(E_1) : y' - 2y = xe^x$

- 1) Résous l'équation différentielle  $(E_2) : y' - 2y = 0$  où  $y$  désigne une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Soient  $a$  et  $b$  deux réels et soit  $u$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = (ax + b)e^x$ .  
a) Détermine  $a$  et  $b$  pour que  $u$  soit solution de l'équation  $(E_1)$ .

- b) Montre qu'une fonction  $v$  est solution de l'équation  $(E_1)$  si et seulement si  $u - v$  est solution de  $(E_2)$ .  
c) En déduis l'ensemble des solutions de  $(E_1)$ .

3) Détermine la solution de l'équation  $(E_1)$  qui s'annule en 0.

**Partie B :** Étude d'une fonction auxiliaire

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2e^x - x - 2$ .

- 1) Détermine la limite de  $g$  en  $-\infty$  et la limite de  $g$  en  $+\infty$ .  
2) Étudie le sens de variation de  $g$ , puis Dresse son tableau de variation.  
3) On admet que l'équation  $g(x) = 0$  a exactement deux solutions réelles.  
a) Vérifie que 0 est l'une de ces solutions.  
b) L'autre solution est appelée  $\alpha$ . Montre que  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$ .  
c) Détermine le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs du réel  $x$ .

**Partie C :** Étude de la fonction principale

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$

- 1) Détermine la limite de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ . (On pourra mettre  $e^{2x}$  en facteur).  
2) Calcule  $f'(x)$  et Montre que  $f'(x)$  et  $g(x)$  ont le même signe. Étudie le sens de variation de  $f$ .  
3) Montre que  $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ , où  $\alpha$  est défini dans la partie B. En déduis un encadrement de  $f(\alpha)$ . (On rappelle que  $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$ ).  
4) Établis le tableau de variation de  $f$ .  
5) Trace la courbe  $(C)$ , représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal (Unité graphique 2 cm).

**Partie D :** Calcul d'aire

- 1) Soit  $m$  un réel négatif, Interpréter graphiquement l'intégrale  $\int_m^0 f(x) dx$   
2) a) Calcule  $\int_m^0 x e^x dx$  à l'aide d'une intégration par parties.  
b) En déduis  $\int_m^0 f(x) dx$   
3) Calcule la limite de  $\int_m^0 f(x) dx$ , lorsque  $m$  tend vers  $-\infty$ .

### Problème 13

On considère la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 e^x$ . On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- 1) Dresse le tableau de variation de la fonction  $f$  puis trace sa courbe.  
2) Trace dans le même repère la courbe  $(C_g)$  de la fonction  $g(x) = e^x$   
3) Détermine les points communs à  $(C_f)$  et  $(C_g)$ .  
4) Calcule l'aire de la portion du plan définie par l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que :  $-1 \leq x \leq 1$  et  $f(x) \leq y \leq g(x)$

### Problème 14

**Partie A**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x + x - 5$

1) Étudie le sens de variation de  $g$ . (On ne demande pas de Déterminer les limites de  $g$ , ni de construire sa courbe).

2) a) Calcule  $g(0)$  et  $g(2)$

a) Démontre que l'équation :  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + x - 5 = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que :  $1,30 < \alpha < 1,31$ .

**Partie B**

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $] -\infty; 5[$  par :  $f(x) = \ln(5 - x)$ .

1) Étudie le sens de variation de  $f$ . Préciser les limites de  $f$  en 5 et en  $-\infty$ .

2) Prouve que  $f(\alpha) = \alpha$

3) a) Démontre que  $\forall x \in [0; 3]$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

b) En déduis que  $\forall x \in [0; 3]$ , on a :  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

c) Démontre que si  $0 \leq x \leq 3$ , alors  $0 \leq f(x) \leq 3$ .

4) Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , d'unité graphique (3 cm), on désigne (C) la représentation graphique de la fonction  $f$ .

a) Trace la courbe (C), puis hachurer la partie du plan formée des points de coordonnées  $(x, y)$  tel que :

$\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$  on notera (S) cette partie.

b) En remarquant que,  $\forall x \neq 5, \frac{x}{x-5} = 1 + \frac{5}{x-5}$  ; Montre que  $\int_{\alpha}^4 \frac{x}{x-5} dx = 4 - 6\alpha$

c) Prouve que l'aire  $A$  de la partie (S) en  $cm^2$  est donnée par  $A = -\alpha^2 + 6\alpha - 4$ .

*(On utilisera une intégration par partie).*

**Problème 15**

**Partie A**

On considère la fonction  $g$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$

1- a) Démontrer que la limite de  $g$  en  $+\infty$  est égale à  $-1$

b) Déterminer la limite de  $g$  en  $-\infty$

2- a) Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}; g'(x) = (x - 2)e^{1-x}$

b) Dédire le sens de variation de  $g$

c) Dresser le tableau de variation de  $g$

3- a) Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$

b) Justifier que  $0,4 < \alpha < 0,5$

c) Démontrer que :  $\begin{cases} \text{pour tout } x \in ]-\infty; \alpha[; g(x) > 0 \\ \text{pour tout } x \in ]\alpha; +\infty[; g(x) < 0 \end{cases}$

**Partie**

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$  On note (C) la représentation graphique de dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ . Unité graphique : 2 cm

1- a) Démontrer que la limite de  $f$  en  $+\infty$  est égale à  $-\infty$

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$

2- a) Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}; f'(x) = g(x)$

- b) Dédire le sens de variation de  $f$
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$
- 3- a) Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 2$  est une asymptote oblique à  $(C)$  en
  - b) Étudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$
- 4- Démontrer que  $(C)$  admet une branche parabolique de direction  $(OJ)$  en  $-\infty$
- 5- Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1
- 6- Démontrer que  $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$
- 7- On admet que l'équation :  $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$  admet deux solutions. Soit  $\beta$  l'une des solutions.
  - a) Démontrer que  $f(-\beta + 2) = e^{\beta-1}f(\beta)$
  - b) En déduire l'autre solution de l'équation :  $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
- 8- Construire  $(D)$ ,  $(T)$  et  $(C)$  dans le repère  $(O, I, J)$ . On prendra  $\alpha = 0,4$  et  $\beta = 2,5$

### Partie C

Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif et  $A(\lambda)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan délimitée par  $(C)$ , la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x + 2$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \lambda$

- 1- Calculer  $A(\lambda)$  à l'aide d'une intégration par parties
- 2- Déterminer la limite de  $A(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $+\infty$ .

### Problème 16

#### Partie A

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = \ln x^2 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$

- 1) Étudier les limites de  $g$  en 0 et en  $+\infty$
- 2) a- Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ 
  - b- Étudier le sens de variation de  $g$  et dresser son tableau de variation
- 3) Démontrer que l'équation :  $x \in ]0; +\infty[, g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  et que  $0,55 < \alpha < 0,60$ .  
Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près par excès de  $\alpha$
- 4) Dédire des questions précédentes le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

#### Partie B

Soit la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = e^x \left( \ln x^2 + \frac{2}{x} \right)$  et  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O; I; J)$  avec  $OI = 4 \text{ cm}$  et  $OJ = 0,5 \text{ cm}$

- 1) a- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et en donner une interprétation graphique
  - b- Justifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[, f(x) = 2e^x \left( \frac{x \ln x + 1}{x} \right)$
  - c- Calculer alors  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Que peut-on en déduire ?
- 2) a- Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  et donner le sens de variation de  $f$ 
  - b- A l'aide de la question A-3 démontrer que  $f(\alpha) = -\left( \frac{2\alpha-2}{\alpha^2} \right) e^\alpha$
  - c- Dresser le tableau de variation de  $f$
- 3) Donner une équation de la tangente  $(T)$  à  $(C)$  au point d'abscisse 1

4) Tracer avec soin (T) et (C)

**Partie C**

Soit la fonction numérique  $h$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par  $h(x) = e^x \ln x^2$

- 1) a- Démontrer que  $h$  est une primitive sur  $]0; +\infty[$  de  $f$   
 b- Déterminer la primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 2
- 2) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe représentative de  $h$  avec celle de la fonction exponentielle népérienne.

**Problème 17 :**

**Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ , où  $a$  et  $b$  sont des nombres réels. Le tableau de variation de  $g$  se présente comme suit :

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$
$g(x)$	$-\infty$	$e^{-2} + 2$	$2$

- 1- a) Calculer la dérivée  $g'(x)$  de la fonction  $g$  en fonction des réels  $a$  et  $b$   
 b) En utilisant les données du tableau de variation de  $g$ , déterminer les réels  $a$  et  $b$
- 2- On admet que  $g(x) = (x - 1)e^{-x} + 2$ 
  - a) Démontrer que l'équation :  $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$  admet une solution unique noté  $\alpha$
  - b) Vérifier que  $-0,4 < \alpha < -0,3$
  - c) Démontrer que  $\begin{cases} \text{pour tout } x \in ]-\infty; \alpha[ ; g(x) < 0 \\ \text{pour tout } x \in ]\alpha; +\infty[ ; g(x) > 0 \end{cases}$

**Partie B**

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x - 1 - xe^{-x}$

On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; I; J)$ . Unité graphique : 2 cm

- 1- Calculer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$
- 2- On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  ;  
 Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$
- 3- Étudier les variations de  $g$ , puis dresser son tableau de variation
- 4- Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ , puis interpréter graphiquement le résultat obtenu

- 5- a) Démontrer que la droite  $(D): y = 2x - 1$  est une asymptote à la courbe  $(C)$  en
- b) Étudier la position relative de la courbe  $(C)$  par rapport à  $(D)$
- 6- Déterminer une équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse 0
- 7- a) Démontrer que  $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha-1}$
- b) En utilisant la question A-2-b, montrer que :  $-1,40 < f(\alpha) < -1,02$
- 8- Construire avec précision la courbe  $(C)$  et les droites  $(D)$  et  $(T)$  dans le repère  $(0; I; J)$ . On prendra  $f(\alpha) \approx -1,2$

### Partie C

- 1- Montrer que la fonction  $H(x) = -(x+1)e^{-x}$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $h$  définie par  $h(x) = 2x - 1 - f(x)$
- 2- Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement positif
- a) Calculer en fonction de  $\lambda$ , l'aire  $A(\lambda)$  en  $cm^2$ , de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .
- b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$