SIMILITUDES DIRECTES PLANES

Exercice 1 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(0;\vec{u},\vec{v})$.
Déterminer l'écriture complexe des transformations suivantes
1- f est l'homothétie de centre $A(2-i)$ et de rapport $k=-2$.
2- g est la rotation de centre $B(-i)$ et d'angle $\alpha=-\frac{\pi}{2}$.
3- h est la similitude plane directe de centre O, de rapport $k=\sqrt{2}$ et d'angle $\theta=\frac{\pi}{4}$.
4- $s=fog$.

Exercice 2 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E):

$$z^3-(3+3i)z^2+(-6+6i)z+8-16i=0.$$

1. Montrer que $1-i$ est une solution de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
3. Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B et C d'affixes respectives $z_A=-2+2i, z_B=4+2i, z_C=1-i$ et $z_D=1+5i$. Soit M le point d'affixe z distinct de A et C.
(a) Calculer $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$. En déduire la nature du triangle ABC.

(b) Montrer que A,B,C et D sont sur un cercle $(\mathcal{C})$ dont on précisera le centre I et le rayon r.

4. On pose $Z=\frac{z+2-2i}{z-1+i}$.
(a) Interpréter géométriquement $|Z|$ et $\arg(Z)$.
(b) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel non nul.
5. Soit S la similitude directe qui laisse invariant A et transforme C en B.

(a) Donner les éléments caractéristiques de S.
(b) Déterminer l'écriture complexe de S.
(c) Déterminer l'image par S de $(\mathcal{C})$.

Exercice 3 :

Soit $F: M(x,y) \mapsto M'(x';y')$ tel que: $\begin{cases} x' = \frac{-1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \end{cases}$

1) Déterminer l'affixe z' de M'en fonction de z de M. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de F.
2) Déterminer la similitude G tel que $G(A) = 0; G(B) = B$ avec $A(1)$ et $B(-1)$
3) Déterminer FoG.
4) Donner l'expression analytique de H dont l'écriture complexe est $z' = (1-i)z + 2 + i$.

Exercice 4 :

Soit l'application f qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$$

1. Montrer que le point $I(1;1)$ est invariant par f
2. En déduire que $z' - z_I = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})(z - z_I)$
3. (a) Déterminer le module et l'argument de $\frac{z'-z_I}{z-z_I}$
   (b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f
4. Soit g définie par $z' = iz + 1 + i$. Déterminer l'expression de $f \circ g$
5. Soit $(D): y = x + 2$. Déterminer l'image (D') de (D) par g
6. Soit $(C): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$. Déterminer l'image (C') de (C) par g.

Exercice 5 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=-2; b=2i$ et $c=3-i$.

1. a) Placer les points A, B et C.
   b) Donner le module et un argument de $\frac{c-b}{a-b}$.
   c) En, déduire la nature du triangle ABC.
   (d) Donner l'affixe du point I intersection de la droite (BC) avec l'axe des réels.
2. Soit h l'homothétie de rapport - 2, transformant C en B.
   a) Déterminer l'écriture complexe de h.
   b) En déduire le centre de h.
3. Soit r l'application du plan d'écriture complexe $z_0=iz+2+2i$.
   a) Justifier que r est une rotation de centre B.
   b) Préciser son angle.
4. Soit f la transformation du plan définie par $f=roh$.
   a) Montrer que $f(C)=B$ et que l'image I' de I par f est le symétrique de A par rapport à B.
   b) En déduire l'écriture complexe de f.
   c) Donner l'expression analytique de f puis déterminer l'image de la droite $(\Delta): y+2x=0$.

<u>Exercice 6 :</u> 🔥🔥

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(0,\vec{u},\vec{v})$.

On considère le polynôme complexe P défini par :

$$P(z)=z^3+(2-2i)z^2+(2-4i)z-4i$$

1. Déterminer une solution z_0 de l'équation $P(z)=0$ telle que $\bar{z}_0=-z_0$.

2. Achever alors la résolution dans (C) de l'équation $P(z)=0$. On notera par b et c les autres racines telle que $\mathrm{Im}\,(b)<0$.

3. On pose $d=2-2i$. On désigne par A, B, C et D les points du plan dont les affixes sont respectivement z_0, b, c et d.

a) Calculer $\frac{z_0-c}{d-c}$ et $\frac{z_0-b}{d-b}$

b) En déduire une interprétation géométrique de ces résultats.

c) En déduire que les points A, B, C et D sont cocycliques

4. R est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, H homothétie de centre B et de rapport -2. E est l'image du point A par R et K l'antécédent de A par H.

a) Déterminer le écritures complexes de R et de H puis en déduire les affixes des points K et E.

b) Démontrer que ABE es un triangle rectangle isocèle en B.

c) Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$;

5. On pose $S = \text{RoH}$.

a) Déterminer $S(K)$.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

c) Donner l'écriture complexe de S.

d) Déduire alors l'expression analytique de S.

e) Déterminer l'équation de (D') image de la droite

(D) : $\boldsymbol{x - y + 3 = 0}$

f) (C) est le cercle de centre k et de rayon 3, déterminer une équation de (C') image de (C) par S.

6. Soit z un nombre complexe distinct de $2i$. Soit Z un nombre complexe tel que $Z = \frac{z-2+2i}{z-2i}$.

a) On pose $z = x + iy$.

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y.

b) Déterminer l'ensemble (τ) des points $M(z)$ tel que Z soit réel.

c) Déterminer l'ensemble ($\emptyset$) des points $M(z)$ tel que Z soit imaginaire pur.

d) Déterminer l'ensemble (θ) des points $M(z)$ tel que $|Z| = 1$

SIMILITUDES DIRECTES PLANES

Exercice 1 :

Déterminons l'écriture complexe :

1)

On a : $z' = kz + b$ avec $k = -2$ et $\Omega_A(2-i)$

Cherchons b.

On a : $z_\Omega = \frac{b}{1-k} \Rightarrow b = z_\Omega(1-k)$

$\Leftrightarrow b = (2-i)(1+2) = 6-3i$

Finalement,

$$\boxed{f : z' = -2z + 6 - 3i}$$

2)

On a : $z' = e^{i\alpha}z + b$ avec $\Omega_B(-i)$; $\alpha = \frac{-\pi}{2}$

Cherchons b :

On a : $b = z_\Omega(1-e^{i\alpha}) = -i(1-e^{-i\frac{\pi}{2}}) = -i(1+i) = 1-i$

Finalement,

$$\boxed{g : z' = -iz + 1 - i}$$

3)

On a : $z' = az + b$. Avec $\Omega_O(0)$; $k = \sqrt{2}$; $\theta = \frac{\pi}{4}$

Cherchons a et b

* On a :

$a = ke^{i\theta} = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$

* Comme $\Omega = 0$, donc $b = 0$

Finalement :

$$\boxed{h : z' = (1+i)z}$$

4) $S = f \circ g$.

$f \circ g = f(g) = -2(-iz + 1 - i) + 6 - 3i = 2iz + 4 - i$

d'où $\boxed{f \circ g = 2iz + 4 - i}$

Exercice 2 :

1) Mq $1-i$ est une solution de (E)

$$(E) : z^3 - (3+3i)z^2 + (-6+6i)z + 8 - 16i = 0$$

On a :

$$E(1-i) = (1-i)^3 - (3+3i)(1-i)^2 + (-6+6i)(1-i) + 8 - 16i$$
$$= 1 - 3i - 3 + i - (3+3i)(1-2i-1) + (-6+6i+6i+6) + 8 - 16i$$
$$= -2 - 2i - (3+3i)(-2i) + 12i + 8 - 16i$$
$$= -2 - 2i - (-6i+6) + 12i + 8 - 16i$$
$$= -8 + 16i + 8 - 16i = 0$$

Donc $1-i$ est une solution de (E)

2) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Appliquons la méthode de Hörner :

	1	$-3-3i$	$-6+6i$	$8-16i$
$1-i$		$1-i$	$-6-2i$	$-8+16i$
	1	$-2-4i$	$-12+4i$	0

Ainsi,

on a : $(E) : [z - 1 + i][(z^2 + (-2-4i)z - 12 + 4i] = 0$

Résolvons $z^2 + (-2-4i)z - 12 + 4i = 0$

$$\Delta = (-2-4i)^2 - 4(1)(-12+4i) = \underline{36}$$

Ainsi,

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4i-6}{2} = -2+2i$$

$$\underline{z_1 = -2+2i}$$

$$Z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4i+6}{2} = 4+2i$$

$$\underline{Z_2 = 4+2i}$$

Donc $\boxed{S = \{1-i\,;\,-2+2i\,;\,4+2i\}}$

3)

a) Calculons $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}$

$$\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C} = \frac{-2+2i-1+i}{4+2i-1+i} = \frac{-3+3i}{3+3i} = \frac{(-3+3i)(3-3i)}{18}$$

$$= \frac{18i}{18} = i$$

Ainsi, $\boxed{\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C} = i}$

Nature : ABC est un triangle rectangle isocèle en C.

b) Mq A, B, C et D sont cocycliques.

Le triangle ABC est rectangle isocèle en C, donc les points A, B et C appartiennent à un même cercle dont le centre est le milieu de l'hypothénus [AB].

Centre :

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{-2+2i+4+2i}{2} = \frac{2+4i}{2} = \underline{1+2i}$$

Rayon : AI

$|AI| = |Z_I - Z_A| = |1+2i+2-2i| = \underline{3}$

Vérifions que $D \in (\mathscr{C})$

$D \in (\mathscr{C})$ ssi $|DI| = 3 \Rightarrow |1+2i-1-5i| = |-3i| = \underline{3}$

Donc A, B, C et D $\in \mathscr{C}(1+2i\,;\,3)$.

4)

a) Interprétation géométrique de $|Z|$ et $\arg(Z)$

* $|Z| = \left|\frac{z+2-2i}{z-1+i}\right| = \left|\frac{z-(-2+2i)}{z-(1-i)}\right| = \left|\frac{z-z_A}{z-z_C}\right| = \frac{MA}{MC}$

Ainsi, $\boxed{|Z| = \left|\frac{z-z_A}{z-z_C}\right| = \frac{MA}{MC}}$

* $\boxed{\arg(Z) = \arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right) = (\vec{MC}; \vec{MA})\ [2\pi]}$

b) L'ensemble des pts \ $Z \in \mathbb{R}^*$

On a ; $Z \in \mathbb{R}^* \Rightarrow (\vec{MC}; \vec{MA}) = 0\ [\pi]$.

Donc l'ensemble des pts est la droite (AC) privée des points A et C.

5)

a) Les éléments caractéristiques de S :

Les éléments caractéristiques sont le centre, l'angle et le rapport

Centre : A est invariant donc A est le centre.

D'où $z_\Omega = -2+2i$.

Angle : $\theta = (\vec{AC}; \vec{AB}) = \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right)\ [2\pi]$.

$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{-2+2i-4-2i}{-2+2i-1+i} = 1+i$.

Donc $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Rapport : $K = \left|\frac{AB}{AC}\right| = |1+i| = \sqrt{2}$.

b) L'écriture complexe de S.

Soit $z' = az+b$.

Or $k = |a| = |1+i|$. Donc $a = 1+i$.

Maintenant, cherchons b.

1ère méthode :

On a : $z' = (1+i)z + b$.

Or $b = z_\Omega(1-a) = (-2+2i)(1-1-i) = \underline{2+2i}$

Donc $\underline{b = 2+2i}$.

2e méthode :

On a : S transforme C en B.

Ainsi,

$$z_B = a z_C + b$$

$$\Rightarrow 4+2i = (1+i)(1-i) + b$$

$$\Rightarrow b = 4+2i - (1+i)(1-i)$$

$$\Rightarrow b = 4+2i - 2 = 2+2i$$

Donc $\underline{b = 2+2i}$ (A vous de choisir 🤩)

c) L'image de S par $(\mathscr{C})$.

On a :

* $r' = kr = \sqrt{2}(3) = \underline{3\sqrt{2}}$

* $z_J = (1+i)z_I + 2+2i = (1+i)(1+2i) + 2+2i = 1+5i$

Donc :

$(\mathscr{C}')$: Rayon ; $r' = 3\sqrt{2}$

Centre : $J = 1+5i$.

Exercice 3 :

$$F : M(x;y) \mapsto M'(x';y') \quad \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \end{cases}$$

1) L'affixe z' de M' en fonction de M.

On a : $z' = x' + iy'$

$$= -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}x - i\frac{1}{2}y - i\frac{3}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}x - i\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y - i\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} - i\frac{3}{2}$$

$$= x\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}(1-i)$$

$$= x\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + iy\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}(1-i)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x+iy) + \frac{3}{2}(1-i)$$

Or $z_M = x + iy$.

Donc,

$$\boxed{z'_M = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_M + \frac{3}{2}(1-i)}$$

Déduisons-en la nature et les éléments caract. de F.

On a : $z'_M = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_M + \frac{3}{2}(1-i)$.

$$\left|\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1.$$

Or $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$. Donc il s'agit d'une rotation.

Angle: $\theta = \arg(a)\ [2\pi] = \arg\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

Centre: $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{3(1-i)}{2\left(1+\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{3+\sqrt{3}}{4} + i\frac{\sqrt{3}-3}{4}$

2) déterminons la similitude :

Soit $z' = az + b$

* $G(A) = O \Rightarrow z'_O = az_A + b$
* $G(B) = B \Rightarrow z'_B = az_B + b$

On a donc :

$$\begin{cases} az_A + b = 0 & (1) \\ az_B + b = z_B & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow az_A - az_B = -z_B \Rightarrow a = \frac{-z_B}{z_A - z_B} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Donc $a = \frac{1}{2}$

On a :

$z'_O = az_A + b \Rightarrow b = -az_A \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

Finalement, $\boxed{G : z' = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$

3) Déterminons $F \circ G$.

$F \circ G = F(G)$

Or $F : \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{3}{2}(1-i)$

$G : \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$

Donc,

$$F\circ G : z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}(1-i)$$

$$\Rightarrow z' = -\frac{1}{4}z + \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}z - i\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$z' = \left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{7}{4} + i\left(\frac{-6-\sqrt{3}}{4}\right)$$

D'où

$$\boxed{F\circ G : z' = \left(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + \frac{7}{4} + i\left(\frac{-6-\sqrt{3}}{4}\right)}$$

4) L'expression analytique de H.

Soient $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$.

$$H : z' = (1-i)z + 2 + i$$

$$= (1-i)(x+iy) + 2 + i$$

$$= x + iy - ix + y + 2 + i$$

$$z' = x + y + 2 + i(y - x + 1)$$

Donc par identification ;

$$\boxed{\begin{cases} x' = x + y + 2 \\ y' = y - x + 1 \end{cases}}$$

Exercice 4 :

1) Mq $I(1;1)$ est invariant par f.

On a : $f : z' = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i$

I est invariant veut dire qu'il est le centre.

Ainsi, il suffit de vérifier que $z_\Omega = 1+i$.

$$z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{\sqrt{3}(1-i)}{1-1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1-i)}{-i\sqrt{3}} = \frac{1-i}{-i} = 1+i$$

Ainsi, $z_\Omega = 1+i = z_I$

Donc $I(1;1)$ est invariant par f.

2) Déduction

On a :

$$(1+i\sqrt{3})(z-z_I) = (1+i\sqrt{3})z - (1+i\sqrt{3})z_I$$
$$= (1+i\sqrt{3})z - (1+i\sqrt{3})(1+i)$$
$$= (1+i\sqrt{3})z - 1(1+i) - i\sqrt{3}(1+i)$$
$$= (1+i\sqrt{3})z - (1+i) - i\sqrt{3} + \sqrt{3}.$$
$$= \underbrace{(1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)}_{z'} - \underbrace{(1+i)}_{z_I}$$

Ainsi, $\boxed{z' - z_I = (1+i\sqrt{3})(z-z_I)}$ cqfd !

3)

a) Le module et l'argument de $\frac{z'-z_I}{z-z_I}$

On a : $z' - z_I = (1+i\sqrt{3})(z-z_I)$

$$\Rightarrow \frac{z'-z_I}{z-z_I} = 1+i\sqrt{3}$$

* $\Rightarrow \left|\frac{z'-z_I}{z-z_I}\right| = |1+i\sqrt{3}| = 2$

D'où $\boxed{\left|\dfrac{Z'-Z_I}{Z-Z_I}\right| = 2}$

- $\arg\left(\dfrac{Z'-Z_I}{Z-Z_I}\right) = \arg(1+i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$

$$\boxed{\arg\left(\dfrac{Z'-Z_I}{Z-Z_I}\right) = \dfrac{\pi}{3}}$$

b) Déduction

On a : $1+i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$ et que $|1+i\sqrt{3}| = 2 \neq 1$.

Donc, il s'agit d'une S.D.P.

Les éléments caractéristiques :

Rapport : $K = 2$

Angle : $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Centre : Le point $I(1;1)$.

4) L'expression de $f \circ g$.

$f \circ g = f(g) = (1+i\sqrt{3})(iz+1+i) + \sqrt{3}(1-i) = (-\sqrt{3}+i)z + 1 + i$

D'où $\boxed{f \circ g = (-\sqrt{3}+i)z + 1 + i}$

5) L'image (D') de (D) par g.

Soient $z' = x'+iy'$ et $z = x+iy$.

On a :

$$z' = iz + 1 + i \Rightarrow x'+iy' = i(x+iy) + 1 + i$$
$$= ix - y + 1 + i$$
$$x'+iy' = 1 - y + i(x+1)$$

Par identification :

$$\begin{cases} x' = 1-y \\ y' = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1-x-2 & (1) \\ y' = x+1 & (2) \end{cases}$$

$(1) + (2) \Rightarrow x' + y' = 0$

D'où $\boxed{(\Delta') : x' + y' = 0}$

6) L'image $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$ par g.

On a :

$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y - 8 = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - 8 = 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$

Donc $\mathscr{C}\left((1;-1); \sqrt{10}\right)$

On a :

$z_{J'} = iz_J + 1 + i$

Cherchons J'

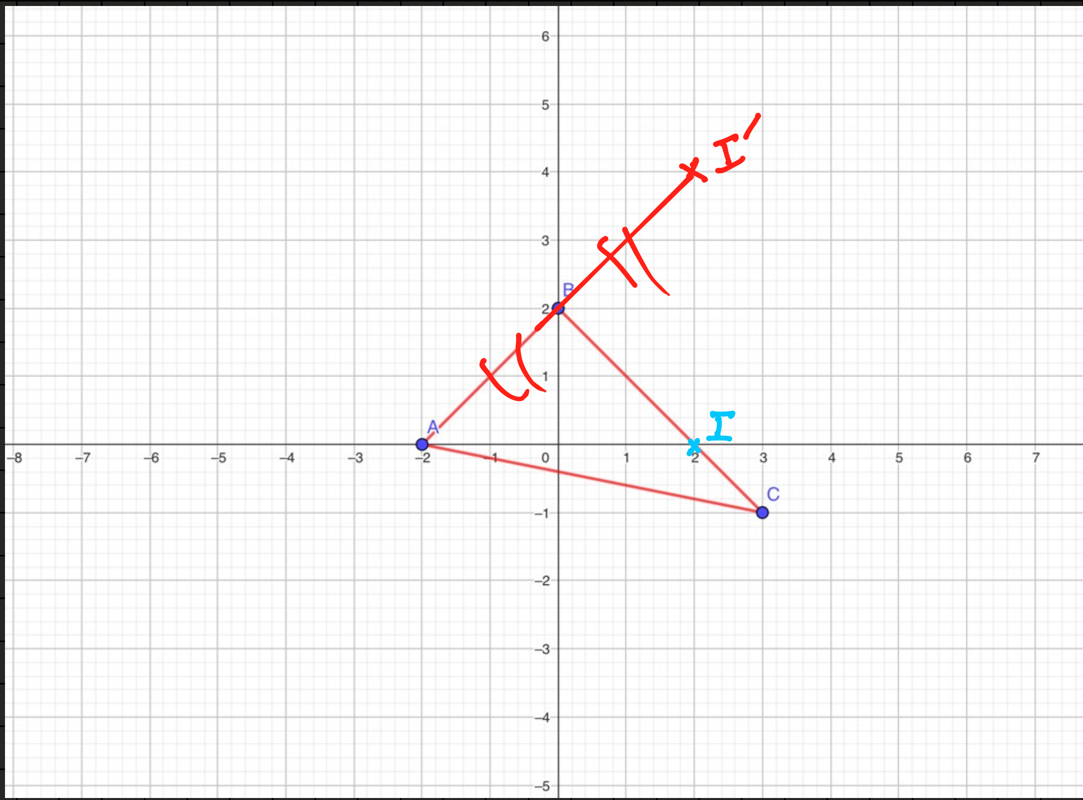
On a : $z_{J'} = i(1-i) + 1 + i = 2 + 2i$

D'où $J' = 2 + 2i$

Donc $\boxed{\mathscr{C}'\left((2;2); \sqrt{10}\right)}$

Exercice 5 :

1) a) Plaçons A, B et C



b) Le module et l'argument :

* $\left|\frac{c-b}{a-b}\right| = \left|\frac{3-i-2i}{-2-2i}\right| = \left|\frac{3-3i}{-2-2i}\right| = \frac{3}{2}\left|\frac{1-i}{-1-i}\right| = \frac{3}{2}\left|\frac{1-i}{1+i}\right|$

$= \frac{3}{2}|-i|$

$= \frac{3}{2}$

Donc $\boxed{\left|\frac{c-b}{a-b}\right| = \frac{3}{2}}$

* $\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) = \arg\left(-\frac{3}{2}i\right) = \frac{-\pi}{2}$

Donc $\boxed{\arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) = \frac{-\pi}{2}}$

c) La nature de ABC

On a : $\frac{c-b}{a-b} = \frac{-3}{2}i$ donc le triangle est rectangle en B.

d) L'affixe de I :

On a : $\vec{BC}$ est colinéaire à $\vec{BI}$.

Ainsi,

$$\begin{vmatrix} 3 & x_I \\ -3i & y_I - 2i \end{vmatrix} \Rightarrow 3(\cancel{y_I}^{0} - 2i) = -3i(x_I)$$

$\Rightarrow -6i = -3ix_I$

$\Rightarrow x_I = 2$

Donc $\boxed{I(2;0)}$

2) a) L'écriture de h.

Soit $z' = Kz + b$. Avec $K = -2$

Ainsi, $z' = -2z + b$.

Cherchons b ;

h transforme C en B $\Rightarrow z_B = -2z_C + b$

$\Rightarrow b = z_B + 2z_C$.

$= 2i + 2(3-i) = 6$

Donc, $\boxed{h ; z' = -2z + 6}$

b) Déduction du centre

$z_\Omega = \frac{b}{1-K}$. AN $z_\Omega = \frac{6}{1+2} = 2$

Donc h a pour centre 2.

3) a) Justification

$z_0 = iz + 2 + 2i$

* r est une rotation si $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$

. Or $i \in \mathbb{C}$ et $|i| = 1$

Donc r est une rotation (1)

* Vq B est le centre

On a : $z_\Omega = \frac{b}{1-k} = \frac{2+2i}{1-i} = 2i = z_B$ (2)

D'après (1) et (2), r est une rotation de centre B.

b) L'angle

$\theta = \arg(a) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

D'où $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$

4)

a) Mq $f(C) = B$.

On a : $f = r \circ h = r(h)$

$f(C) = B \iff f_C = r[h(C)]$. Or $h(C) = B$.

$\Rightarrow f_C = r(B)$. Or $r(B) = B$.

Finalement,

$\boxed{f(C) = B}$ cqfd!

Mq l'image de I' de I ...

On a :

$f(I) = I'$.

$f(I) = r \circ h(I) = r[h(I)] = r(I)$

Ainsi,

$z_{I'} = i z_I + 2 + 2i = 2i + 2 + 2i = 2 + 4i$

Ainsi, $\underline{z_{I'} = 2 + 4i}$

Vérifions maintenant que $z_B = \frac{z_A + z_{I'}}{2}$

$\frac{z_A + z_{I'}}{2} = \frac{-2 + 2 + 4i}{2} = 2i = z_B$.

Donc $z_B = \dfrac{z_A + z_{I'}}{2}$

D'où l'image I' de I par f est le symétrique de A par rapport à B.

b) L'écriture complexe de f :

On a : $f = r(h)$

Or $r : z' = iz + 2 + 2i$ et $h : z' = -2z + 6$

Ainsi,
$$f = i(-2z+6) + 2 + 2i = -2iz + 6i + 2 + 2i$$
$$= -2iz + 2 + 8i$$

d'où $\boxed{f : z' = -2iz + 2 + 8i}$

c) L'expression analytique de f puis l'image (Δ).

$f : z' = -2iz + 2 + 8i$.

Soient $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$.

On a : $x' + iy' = -2i(x+iy) + 2 + 8i$
$$= -2ix + 2y + 2 + 8i$$
$$x' + iy' = 2y + 2 + i(-2x + 8)$$

Par identification : $\begin{cases} x' = 2y + 2 \\ y' = -2x + 8 \end{cases}$

Or $(\Delta) : y + 2x = 0 \Rightarrow y = -2x$

Ainsi, on a :
$$\begin{cases} x' = -4x + 2 & (1) \\ y' = -2x + 8 & (2) \end{cases}$$

$(1) - 2\times(2) \Rightarrow x' - 2y' = -14$

D'où $\boxed{(\Delta') : x' - 2y' + 14 = 0}$

CETTE SÉRIE EST AUSSI CORRIGÉE EN FORMAT VIDEOS DISPONIBLE DANS MA PLATEFORME D'E-LEARNING ET DANS LES GROUPES TÉLÉGRAMME DE COURS EN LIGNE. POUR PLUS D'INFORMATIONS CONTACTE MOI AU 77-850-82-72