PRIMITIVE ET INTEGRALE

Exercice 1 :

Détermine les primitives F des fonctions f suivantes sur un intervalle que l'on précisera :

1. $f(x) = x^2 - 2x + 1;$
2) $f(x) = 3x - 1 + \frac{17}{x^2}$
3) $f(x) = 5x + \frac{3}{\sqrt{x}};$
4) $f(x) = (3x^3 + 1)^2$
5) $f(x) = (x+1)^2(x-1);$
6) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^4}$
7) $f(x) = 5x^3(x^4 - 7)^4;$
8) $f(x) = \frac{5x-1}{(5x^2-2x+1)^2}$
9) $f(x) = \frac{3}{(1+2x)^5}$
10) $f(x) = \frac{2x^2+1}{(8x^3+2x-2015)^{-31}}$
11.) $f(x) = x^2(x-1)^2 - \frac{9x}{x^2-7}$
12.) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x} - \frac{(x+3)^3}{x} - \frac{1}{2}x + 4$

Exercice 2 :

Dans chacun des cas suivants, détermine les primitives de la fonction f sur l'intervalle K.

a) $f(x) = \sqrt{3x+4}$ sur IR+
b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+6}}$ sur IR
c) $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{(x^2-4x+25)}^3}$ sur D_f
d) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ sur IR.

Exercice 3 :

1. Calcule les intégrales suivantes:
   a) $A = \int_0^1 (x^3 + 2x - 1)dx$
   b) $B = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{|x|}}\right) dx$
   c) $C = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x + \cos 3x + x^2)dx$

d) $D = \int_0^2 \sqrt{x+1}dx$

e) $E = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$

f) $F = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

g) $G = \int_0^1 \frac{-3x}{(x^2+1)^2} dx$

h) $H = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx$

i) $I = \int_1^2 (3 + \ln x - e^{2x+1}) dx$

k) $K = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx$

2. a) Démontre qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall \, t \in]-1;1[$, $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$.

b) Calculer $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$ pour $]-1;1[$.

3) Calcule à l'aide d'un changement de variable l'intégrale : $F = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ (on pourra poser $x = \tan \theta$).

Exercice 4 :

A l'aide d' intégrations par partie, calcule les intégrales suivantes :

a) $A = \int_0^{\pi} x\cos x dx$;

b) $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$; c) $C = \int_1^e x^2 \ln x dx$

b) $D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t dt$

c) $E = \int_{-1}^0 (x+1)^2 e^{-x} dx$

f) $F = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$; g) G= $\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$

h) $H = \int_0^2 \frac{3\ln x}{e^x} dx$; i) $I = \int_2^5 \frac{1-\ln x}{1-e^x} dx$

k) $K = \int_2^3 \ln(\sin x) dx$; 1) $L = \int_1^5 x e^{x^3} dx$

Exercice 5 :

On se propose de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}; \; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx; \; K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx$$

1. Soit la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $\mathrm{f}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$.
   a) Calcule la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ puis calcule la dérivée première f' de f.
   b) Calcule la valeur de I.

2. a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que $\mathrm{J} + 2\mathrm{I} = \mathrm{K}$.
   b) A l'aide d'une intégration par partie portant sur l'intégrale K, montrer que : $\mathrm{K} = \sqrt{3} - \mathrm{J}$.

   c) En déduire les valeurs de J et K.