TRAVAUX DIRIGES: FONCTION LOGARITHME : dérivée-Primitive-Limites

EXERCICE 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f *de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{R}$ définie par :

(1) $f(x) = \ln(2-3x)$ (2) $f(x) = \ln|2-3x|$ (3) $f(x) = \ln[(x+5)^2]$

(4) $f(x) = \ln\sqrt{x+5}$ (5) $f(x) = \ln(2x-3) + \ln(5x-2)$

(6) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-3}{5x-2}\right)$ (7) $f(x) = \ln\left|\dfrac{2x-3}{5x-2}\right|$

EXERCICE 2

Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

(a) $\ln 32$ (b) $\ln\frac{1}{4}$ (c) $2\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ (d) $\ln\sqrt{2}$ (e) $\ln 3\sqrt{2}$ (f) $2\ln\sqrt{\frac{2}{3}}$

(g) $\ln 36 - 2\ln 12$ (h) $\ln 27 + 2\ln 8 - 3\ln 108$

EXERCICE 3

Ecris sous la forme de $\ln A$ chacun des nombres réels suivants :

(a) $3\ln 2 - \ln 7 + \ln 4$ (b) $\ln 5 - 3\ln 3 - \ln 2$ (c) $\ln 4 + \frac{1}{2}\ln 9 - 2\ln 5$

(d) $\ln(0{,}1) + \ln 10 - \ln(0{,}001)$ (e) $\ln(1+\sqrt{2}) + \ln(1-\sqrt{2})$ (f) $\ln\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{5+\sqrt{3}}\right)$

(g) $\ln(1-\sqrt{2})^{10} + \ln(1+\sqrt{2})^{10}$ (h) $\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $\ln(5-2x) = 0$ (b) $\ln(x-3) = \ln(2+x)$

(c) $\ln(x^2-4) = \ln(1-4x)$ (d) $\ln(x^2-2x+2) = 1$

(e) $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(2+x)$ (f) $\ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(2+x)$

(g) $\ln(5x+2) - \ln(x+2) = \ln(x-2)$

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $\ln(2x-3) + 2\ln(x+1) = \ln(x-1)$ (2) $3\ln(x+1) = 1$

(3) $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$ (4) $\ln\left|\frac{1}{2}+x\right| = \ln|x|$

(5) $\ln|x-1| + \ln|2x+1| = 0$

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $\ln(\ln x) > 0$ (b) $\ln x < 3\ln 2$ (c) $\ln(x^3-x+1) \geq \ln(2-x)$

(d) $(1-\ln x)(3+\ln x) \geq 0$ (e) $(\ln x^2) \leq 1$ (f) $\ln(x^2-9) \leq 0$

EXERCICE 7

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

(1) $\begin{cases} x-y=-2 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -15 \\ \ln(xy) = -2 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 1 \\ 5\ln x + 3\ln y = 4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x^2+y^2 = 29 \\ \ln x + \ln y = \ln 10 \end{cases}$

EXERCICE 8

Dans chacun des cas suivants calculer les limites de la fonction f pour les valeurs indiquées :

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$, *en* 0 *et en* $+\infty$; (b) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$, *en* 1 *et en* $+\infty$ (c) $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$, *en* 0 *et en* $+\infty$

$(d)\ f(x) = x(1 - \ln x), en\ 0\ et\ en + \infty$ $(e)\ f(x) = \ln\left(\frac{x-5}{x+2}\right), en\ 5\ et\ en + \infty$ $(f) f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right), en\ 1\ et\ en\ 2$ $(g)\ f(x) = (x-2)\ln(x-2), en\ 2\ et\ en + \infty$ $(h) f(x) = (x - \ln x) en + \infty$

$(i)\ f(x) = (x + \ln|x|)\ en - \infty$ $(j)\ f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ en + \infty$ $(k)\ f(x) = \frac{\ln x + 3}{\ln x + 1}, en + \infty$

$(l)\ f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right), en + \infty$; $(m)\ f(x) = \left(x - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\right), en + \infty$; $(n) f(x) = x^3 \ln x\ , en\ 0$

$(o)\ f(x) = \sqrt{x}\ln x\ , en\ O$; $(p)\ f(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln x\right), en\ 0$; $(q)\ f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}, en\ 0$

$(r)\ f(x) = \frac{\ln(2-x)}{x-1}, en\ 1$; $(s)\ f(x) = \frac{\ln x - 1}{x - e}, en\ e$; $(t)\ f(x) = \frac{x\ln x - e}{x - e}, en\ e$

EXERCICE 9

Pour chacune des fonctions f de ℝ vers ℝ définie ci-dessous :

Déterminer l'ensemble de définition D_f et Calculer $f'(x)$.

$(1)\ f(x) = \ln(-2x + 1)$; $(2)\ f(x) = \ln(|1 - 3x|)$; $(3)\ f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$;

$(4)\ f(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}$ $(5)\ f(x) = \sqrt{\ln x} + 3x$ $(6)\ f(x) = \ln\sqrt{x} - 5x$

EXERCICE 10

On considère la fonction f définie sur ℝ. Dans chacun des cas suivants, Etudier la Continuité et la Dérivabilité :

$(1) \begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} & , Si\ x \neq O \\ f(0) = 0 \end{cases}$ $(en\ 0)$ $(2) \begin{cases} f(x) = x^2\ , & si\ x \leq 1 \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}\ , & si\ x \geq 1 \end{cases}$ $(en\ 1)$

EXERCICE 11

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives sur K de la fonction f.

$(a)\ f(x) = \frac{3}{2-x}\ avec\ K =]2\ ;\ +\infty[$ $(b)\ f(x) = \frac{-4x-2}{x^2+x+1}\ avec\ K = \mathbb{R}$

$(c)\ f(x) = \frac{\ln x}{x}\ avec\ K =]0;\ +\infty[$ $(d)\ f(x) = \frac{1}{x\ln x}\ avec\ K =]1\ ;\ +\infty[$

EXERCICE 12

On donne une fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{2x-5}{(x-2)(1-x)}$.

1) Démontrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{1-x}$
2) Déterminer une primitive sur $]2\ ;\ +\infty[$ de la fonction f .

EXERCICE 13

On donne $f(x) = \frac{3x^2+2x-2}{3x-1}$ Déterminer une primitive de la fonction f sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$ puis sur $\left]\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

EXERCICE 14

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $par\ :\ f(x) = \frac{3x+1}{(2x+1)^2}$

Déterminer deux réels a et b tels que pour x distinct de $-\frac{1}{2}$ on a $f(x) = \frac{a}{2x+1} + \frac{b}{(2x+1)^2}$.

Déterminer la primitive F de f sur $]-0{,}5\ ;\ +\infty[$ qui prend la valeur 1 en 0.