FICHE DE TD N°2 MATHS Terminales C, D et E : Nombres complexes, arithmétiques, similitudes, fonctions numériques et suites

I- Nombres complexes et similitudes

Exercice 1*

EXERCICE 1

Partie A On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par : $P(z) = z^4 + 2\sqrt{3}z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3}z + 7$

1. (a) Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.

   (b) Montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré, que l'on déterminera, tel que :
   Pour tout $z \in \mathbb{C},\ P(z) = \left(z^2+1\right) Q(z)$

2. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

Partie B Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1. Placer dans ce repère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = -i$, $z_C = -\sqrt{3}$ et $z_D = -\sqrt{3} - 2i$. Montrer que ces quatre points appartiennent au cercle de diamètre $[CD]$.

2. Montrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme C en D. Calculer une valeur entière approchée à un degré près d'une mesure de l'angle de cette rotation.

3. Calculer, sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, le rapport : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ Interpréter géométriquement le module et l'argument de ce rapport.

Exercice 2

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) z + 9 = 0$ On notera z_1 et z_2 les solutions trouvées, z_1 étant la solution de partie imaginaire positive.

   (b) Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2, et donner l'écriture exponentielle de z_1 et de z_2.

   (c) Placer dans le plan P rapporté à un repère orthonormal direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm, les images M_1 et M_2 de z_1 et z_2.
   Expliquer pourquoi M_1 et M_2 sont situés sur le cercle Γ de centre O de rayon 3, que l'on tracera.

2. On considère la transformation du plan P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$ On considère les points A et B d'affixes $z_A = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et A' et B' leurs images par f.

   (a) Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

   (b) Déterminer sous forme exponentielle les affixes $z_{A'}$ et $z_{B'}$ des points A' et B'. Placer les points A, B, A' et B' sur la figure.
   Expliquer pourquoi ces points sont sur le cercle Γ.

3. Calculer $\arg\left(\dfrac{z_{A'}}{z_B}\right)$ et montrer que B et A' sont symétriques par rapport au point O. En déduire que le triangle ABA' est rectangle.

Exercice 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). A, B et C sont trois points du plan d'affixes respectives a, b, c. On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C. On rappelle que $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.
Montrer que $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On considère le point A d'affixe $1+\mathrm{i}$. On associe, à tout point M du plan d'affixe z non nulle, le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1-\mathrm{i}}{z}$. Le point M' est appelé le point image du point M.

1. (a) Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B′, image du point B d'affixe i.
   (b) Montrer que, pour tout point M du plan d'affixe z non nulle, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3. Quel est l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel ?

Exercice 4

Partie I : Restitution organisée de connaissances
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où α est un nombre complexe non nul et β est un nombre complexe. Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.
Démontrer qu'il existe une unique similitude directe s telle que $s(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $s(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right)$; $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.
On considère le point C tel que ABCD est un carré. Soit E le milieu du segment [AD], on considère le carré EDGF tel que $\left(\overrightarrow{ED},\ \overrightarrow{EF}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

1. (a) Faire une figure en plaçant les points A, B, C, D, E, F, G. On complétera la figure au cours de l'exercice.
   (b) Préciser les nombres complexes a, b, c, d, e, f, g, affixes respectives des points A, B, C, D, E, F et G.
   (c) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s du plan telle que $s(\mathrm{D}) = \mathrm{F}$ et $s(\mathrm{B}) = \mathrm{D}$.
2. On se propose de préciser les éléments caractéristiques de la similitude directe s.
   (a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de la similitude directe s.
   (b) Donner l'écriture complexe de cette similitude.
   (c) Déterminer, le centre Ω de la similitude directe s.

Exercice 5

1. (a) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\dfrac{2}{3}$.
   Exprimer r_n en fonction de r_0 et n.
   (b) Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 appartenant à l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et de raison $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Exprimer θ_n en fonction de θ_0 et de n.
   (c) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = r_n(\cos\theta_n + \mathrm{i}\sin\theta_n)$.
   Sachant que z_0, z_1 et z_2 sont liés par la relation $z_0 z_1 z_2 = 8$, déterminer le module et un argument de z_0, z_1 et z_2.

2. Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm), on appelle M_n le point d'affixe z_n.
   (a) Placer les points M_0, M_1, M_2 et M_3 dans le plan $\mathcal{P}$.
   (b) Pour tout entier n, exprimer z_{n+1} en fonction de z_n.
   (c) Calculer alors M_nM_{n+1} en fonction de n.
   (d) On pose $l_n = \sum_{k=0}^{n} M_kM_{k+1} = M_0M_1 + \cdots + M_nM_{n+1}$.
   Calculer l_n en fonction de n et déterminer la limite de l_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
2. On considère les points A d'affixe $z_\text{A} = \sqrt{3} - \text{i}$, B d'affixe $z_\text{B} = \sqrt{3} + \text{i}$ et C le milieu de [OB] d'affixe z_C.
   (a) Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C.
   (b) Sur une figure, placer les points A, B et C, en prenant 2 cm pour unité.
   (c) Montrer que le triangle OAB est équilatéral.
3. Soit D l'image de C par la rotation r de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et E l'image de D par la translation t de vecteur $2\overrightarrow{v}$.
   (a) Placer les points D et E sur une figure.
   (b) Montrer que l'affixe z_E du point E vérifie : $z_\text{E} = \dfrac{1}{2}\left[1 + \text{i}\left(4 - \sqrt{3}\right)\right]$.
   (c) Montrer que $\text{OE} = \text{BE} = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$.
   (d) Montrer que les points A, C et E sont sont alignés.

Exercice 7

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

1. Soit le polynôme P tel que pour tout z de $\mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ Déterminer les réels u et v tels que $P(z) = (z-2)\left(z^2 + uz + v\right)$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
2. On note α la solution de l'équation ci-dessus dont la partie imaginaire est strictement positive et β le conjugué de α. Soient A, B et C les points d'affixes respectives α, β et 2, I le milieu de $[AB]$ et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer l'affixe du point $r(B)$ et en déduire la nature du quadrilatère $OACB$.
3. Soit f l'application de $\mathcal{P}$ privé du point C dans $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z ($z \neq 2$) associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z-(1+i)}{z-2}$
   (a) Déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
   Déterminer le point E tel que $f(E) = C$.
   (b) Quelles distances représentent les réels $|z-(1+i)|$ et $|z-2|$?
   En déduire que si M appartient à la médiatrice de $[AC]$, M' appartient à un cercle dont on donnera le centre et le rayon.

Exercice 8

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations suivantes : (E_1) : $z^2 - 2z + 5 = 0$. (E_2) : $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$.

2. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. les points A, B, C, D d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$, $z_C = 1 + \sqrt{3} - i$, et $z_D = 1 - 2i$.
   (a) Placer les points A, B, C, D et préciser la nature du quadrilatère $ABCD$.
   b. Vérifier que $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$ Que peut-on en déduire pour les droites (AB) et (BD) ?
   (b) Prouver que les points A, B, C, D appartiennent à un même cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

3. On considère l'équation : $(E) : z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$ où θ désigne un nombre réel quelconque.
   (a) Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer que les images des solutions appartiennent au cercle Γ.

Exercice 9

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et 4.
L'application f associe à tout point M d'affixe z de $\mathcal{P}$, distinct de A, le point M′ d'affixe Z définie par : $Z = \frac{z-4}{z-1}$

1. Soit C le point d'affixe $i\sqrt{2}$. Déterminer l'affixe de $\text{C}' = f(\text{C})$.
2. Démontrer que f admet deux points invariants I et J. (On notera I celui d'ordonnée positive.)
   Placer les points I, J, C et C′.
3. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X, Y réels.
   (a) Déterminer X et Y en fonction de x et y.
   (b) Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
   (c) Déterminer et construire l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.
4. Donner une interprétation géométrique de $|Z|$, $|z-4|$, $|z-1|$.
   En déduire l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.
   Construire D.

Exercice 10

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, ayant comme unité graphique 3 cm. Les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique **et** sous forme exponentielle $(\rho e^{i\theta})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ On pose : $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.
   Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle et placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le plan $\mathcal{P}$.
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Calculer l'affixe z_3 du point $M_3 = r(M_2)$ puis placer M_3 sur la figure précédente.
3. Soit t la translation dont le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$. Calculer l'affixe z_4 du point $M_4 = t(M_2)$ puis placer M_4 sur la figure précédente.
4. Soient $z_5 = \dfrac{i}{2}(1 + i\sqrt{3})$ et $z_6 = \dfrac{2}{i - \sqrt{3}}$. Exprimer z_5 et z_6 sous forme algébrique et sous forme exponentielle puis placer les points M_5 et M_6 d'affixes respectives z_5 et z_6 sur la figure.
5. (a) Calculer z_k^6 pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   (b) Ecrire $z^6 + 1$ sous forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels. Justifier cette écriture.

Exercice 11

On considère le polynôme $\text{P}(z) = z^4 + 17z^2 - 28z + 260$, où z est un nombre complexe.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que :

$$\text{P}(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 20).$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\text{P}(z) = 0$.

3. Placer dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les images M, N, P et Q des nombres complexes respectifs $m = -2 + 4i$, $n = -2 - 4i$, $p = 2 + 3i$ et $q = 2 - 3i$.

4. **a.** Déterminer le nombre complexe z vérifiant $\dfrac{z-p}{z-m} = i$. Placer son image K.
b. En déduire que le triangle MPK est isocèle rectangle en K.

5. **a.** Déteminer par le calcul l'affixe du point L, quatrième sommet du carré MKPL.
b. Déterminer l'abscisse du point d'intersection R de la droite (KL) et de l'axe des abscisses.
c. Montrer que M, N, P et Q sont sur un même cercle de centre R.

Exercice 12

1. On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$.
   (a) Calculer $P(4)$.
   (b) Résoudre dans C l'équation : $P(z) = 0$.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tel que : $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 2\ cm$.
   Soient A, B, C les points d'affixes respectives : $a = 4 \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad c = 1 - i\sqrt{3}$
   (a) Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
   (b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$
   On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.
   (a) Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?
   (b) Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.
4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$
   (a) Montrer que le quadrilatère $COFH$ est un carré.
   (b) Calculer l'affixe du point H.
   (c) Le triangle AGH est-il équilatéral ?

Exercice 13

On considère l'expression analytique d'une application h qui à tout point $M(z = x+iy)$ associe le point $M'(z' = x'+iy')$ tel que $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$

1. Montrer que l'écriture complexe de l'application h est $z' = (1 + i)z + i$.
2. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de l'application h.
3. On considère l'ensemble (Γ) des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
   (a) déterminer l'affixe Z_E du point E image de $F(z_F = 1 - 2i)$ par l'application h.
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristique de (Γ).
   (c) En déduire la nature et les élément caractéristiques de (Γ') image de (Γ) par l'application h.
   (d) construire (Γ) et (Γ') dans un même repère.

Exercice 14

On pose $a = \sqrt{3} + i, b = -1 + i\sqrt{3}, c = -2i\ et\ h = a + b + c$

1. Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes $a, b\ et\ c$.
2. Soit $A, B, C\ et\ H$ les points d'affixes respectifs $a, b, c\ et\ h$.
   (a) Placer les points $A, B, C\ et\ H$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{U}, \vec{V})$. (prendre comme unité graphique 2 cm)

   (b) Démontrer que H est l'hortocentre du tringle ABC.
   (c) On note G le centre de gravité du triangle ABC. Déterminer l'affixe de G.
   (d) Démontrer que les points $O, H\ et\ G$ sont alignés.
   (e) On désigne par K le symétrique de H par rapport au milieu du segment $[AC]$. Démontrer que les points $A, B, C\ et\ K$ sont cocycliques.

II- Arithmétiques (Terminales C et E)

Exercice 1

Étant donné deux entiers a et b, on pose $pgcd(a,b) = \Delta(a,b)$

1. Déterminer tous les diviseurs de 85
2. Déterminer tous les couples d'entiers naturels (x,y) qui vérifient : $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5440 \\ \Delta(x,y) = 8 \end{cases}$
3. Soit n un entier naturel. On pose A=n-1 et B=n²-3n+6
   a) Montrer que $\Delta(A,B) = \Delta(A,4)$
   b) Déterminer suivant les valeurs de n, $\Delta(A,B)$
   c) Pour quelles valeurs de n A divise B ?

Exercice 2

a et b sont deux entiers naturels tous non nuls.

1. On suppose que $pgcd(a,b) = 1$. Montrer que $pgcd(a + b, ab) = 1$.

2. On ne suppose plus $pgcd(a,b) = 1$. On pose $\mu = ppcm(a,b)$, $pgcd(a,b) = d$ et $D = pgcd(a+b,\mu)$. On se propose de montrer que D = d c'est-à-dire $pgcd(a+b,\mu) = pgcd(a,b)$.

a. Soit a' et b' les entiers tels que $a = d\,a'$ et $b = d\,b'$, soit k un entier non nul.

i. Justifier l'existence de a' et b'.

ii. Exprimer $pgcd(ka\,,kb)$ en fonction de $pgcd\,(a,b)$ et de k .

iii. Calculer $pgcd(a',b')$.

iv. Déduire de ce qui précède que $pgcd\,(a' + b', a'b') = 1$.

b. En déduire que $pgcd(a + b, \mu) = pgcd(a,b)$.

Exercice 3

1. On se propose, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que : $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$

a. Vérifier que 239 est solution de ce système.

b. Soit N un entier relatif solution de ce système.

Démontrer que N peut s'écrire sous la forme $N = 1 + 17x = 5 + 13\,y$ où x et y sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13\,y = 4$.

c. Résoudre l'équation $17x - 13\,y = 4$ où x et y sont des entiers relatifs.

d. En déduire qu'il existe un entier relatif k tel que $N = 18 + 221k$.

e. Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18\ [221]$ et $\begin{cases} N \equiv 5[13] \\ N \equiv 1[17] \end{cases}$

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

a. Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1\ [17]$?

b. Existe-t-il un entier naturel l tel que $10^l \equiv 18\ [221]$?

Exercice 4

A/ Soit x un nombre réel.

1) Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x$.
2) En déduire que $x^4 + 4$ est le produit de deux trinômes à coefficients entiers.

B/ Soit un entier $n, n \geq 2$.

On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2; d = pgcd(A;B)$.

1) Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2) Montrer que tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
3) Montrer que tout diviseur commun de A et B divise $4n$.
4) Dans cette question, on suppose que n est impair.
   a)Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   b) Montrer que d divise n.
   c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5) On suppose que n est pair
   a)Montrer que 4 ne divise pas A.
   b) Montrer que $d = 2p$, où p est un entier impair.
   c) Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$.

Exercice 5

1- Dans cet exercice a et b désignent des entiers strictement positifs.

a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au+bv=1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. En déduire que si $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$ alors a et b sont premiers entre eux.

2- On se propose de déterminer tous les couples d'entiers strictement positifs $(a\ ;\ b)$ tels que $\left(a^2+ab-b^2\right)^2=1$. Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer a lorsque $a = b$.

b. Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si $(a\ ;\ b)$ est solution et si $a<b$, alors $a^2-b^2<0$.

3- a. Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est une solution différente de (1 ; 1) alors $(y-x\ ;x)$ et $(y\ ;y+x)$ sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4- On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier $n, n\geq 0$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n\geq 0$, $(a_n\ ;a_{n+1})$ est solution. En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Exercice 6

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) 91x +10y = 1.

a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$.

c. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n *est* un entier naturel non nul, sont divisibles par 8.

3. On considère l'équation (E'') $A_3\, x + A_2\, y = 3296$.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs (x, y) solutions de l'équation (E'').

b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

Exercice 7

L'espace est rapporté au repère ortho normal $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ On nomme (S) la surface d'équation $^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives (3 ; 1 ; −3) et (−1 ; 1 ; 1).
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
   b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).
4. a. On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
   b. M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b\ et\ ppcm(a\ ;\ b) = 440$, c'est-a-dire tel que (a, b) soit solution du système

$$(1): \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a\ ;\ b) = 440 \end{cases}$$

Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors $pgcd(a\ ;\ b)$ est égal a 1 ou 5. Conclure.

Exercice 8

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$: 11n −24m = 1.
   a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
   b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
   c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
2. Recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1\ et\ 10^{24} - 1$
   a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1\ et\ 10^{24} - 1$
   b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire : $(10^{11n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$
   c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.

Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

   d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1\ et\ 10^{11} - 1$ divise 9.
   e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de10

Exercice 9

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul ket pour tout entier naturel x:

$$(x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) = x^k - 1$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n: $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
b. Déduire de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.
3. Soient met n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.
a. On définit $m'\ et\ n'\ par\ m = dm'\ et\ n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs $u\ et\ v\ tels\ que\ m.u - n.v = d$.

b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{m.u}-1)-(a^{n.v}-1)a^{d} = a^{d}-1$. Montrer ensuite que $a^{d}-1$ est le PGCD de $(a^{m.u}-1)$ *et de* $(a^{n.v}-1)$.

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63}-1$ *et de* $2^{60}-1$.

Exercice 10

Soit (x_n) *et* (y_n) les suites définies par : $\begin{cases} x_0 = 3, y_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n + 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \frac{2}{5}x_n + \frac{9}{5}y_n + 2 \end{cases}$,

1) Démontrer par récurrence que les points M_n de coordonnées (x_n, y_n) sont sur la droite $(\mathcal{D})$ d'équation : $2x - y - 5 = 0$.

2) En déduire x_{n+1} en fonction de x_n.

3) Démontrer que (x_n) *et* (y_n) sont des suites d'entiers relatifs.

4) Soit n un entier naturel.

a) Démontrer que x_n est divisible par 5 si et seulement si y_n est divisible par 5.

b) Démontrer que si x_n *et* y_n ne sont pas divisible par 5, alors il sont premiers entre eux.

5. a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 2^{n+1} + 1$.

b) Soit n un entier naturel. Démontrer que 5 divise x_n si et seulement si 5 divise x_{n+4}.

c) En déduire les valeurs de n pour les quelles x_n *et* y_n sont divisibles par 5.

III-fonctions et suites

Exercice 1

1. Montrer que $\forall\, x \geq 0$ on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$
2. Montrer que $\forall\, n \in IN, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
3. Soit la suite (U_n) définie par : $U_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{\alpha k}{n^2}\right)$ où α est un paramètre réel ≥ 0. Prouver en utilisant le 1 que :
$$\forall\, n \geq 1 \text{ on a } \frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \leq U_n(\alpha) \leq \alpha\frac{n+1}{2n}$$
4. En déduire que $\big(U_n(\alpha)\big)$ converge vers $\frac{\alpha}{2}$
5. Soit la suite $V_n = \sum_{k=1}^{n} sin^3\left(\frac{k}{n^2}\right)$ $n \geq 1$
   a) Établir que $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}$ on a : $sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$
   b) Montrer que $\forall\, n \geq 1$ on a : $V_n = -\frac{1}{4}U_n(3) + \frac{3}{4}U_n(1)$
   c) Montrer alors que (V_n) est une suite convergente vers zéro.

Exercice 2

Partie A :

Soit f_n définie de IR vers IR par : $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}} \forall n \geq 1$. On note $(\mathcal{C}n)$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. Étudier la parité de f_n et préciser les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C}n)$

2. Déterminer les points fixes de (Cn) et etudier la position relative de $(C_{n+1}) et\ (C_n)$
3. Étudier les variations de f_n

Partie B :

Soit la suite Un définie par : $\begin{cases} U_0 \in]0\,,1[\\ \forall\, n \in IN, U_{n+1} = f_k(U_n) \end{cases}$ $k \in IN \geq 1$

1. Prouver que $\forall\, n \geq 1\,, 0 < U_n < 1$
2. Prouver que $\forall\, n \geq 1, U_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2}} U_n$
3. Prouver que (U_n) est une suite décroissante.
4. Prouver que (U_n) est une suite convergente vers un réel que l'on calculera.

Exercice 3

Soit la suite Un définie par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+U_n^2} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout $n \in IN$ on $0 < U_n < 1$
2. Montrer que (U_n) est une suite croissante
3. Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite
4. On pose une suite Vn définie par : $V_n = \frac{1-U_n}{1+U_n}$
   a) Montrer que $V_{n+1} = V_n^2$
   b) Montrer que : $\forall\, n \in IN, V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$
5. Inégalité
   a) Montrer que $0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5}(1 - U_n)$
   b) Montrer que $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$
   c) Montrer que pour tut $n \in IN^*$, $1 - \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} U_k}{n} \leq 1$

a- Quelle est la limite $H_n(\alpha) quand\ \alpha \to 0$
b- En déduire la valeur

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$

1. Déterminer en :
   a) Les limites en $+\infty\ et\ en - \infty$
   b) Une interprétation graphique pour chacun d'elles
   c) Étudier les branches infinies si possibles
2. Étude du signe
   a) Calculer la dérivée $f'(x)$ et déterminer son signe
   b) Dresser le tableau de variation de f
   c) Tracer la courbe de la fonction f

3. Étude de la réciproque
   a) Démontrer que $f^{-1}(x)$ existe et déterminer son domaine de définition
   b) Montrer que $f^{-1}(x)$ est dérivable sur son domaine de définition
   c) Calculer $f(0) et\ f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$
   d) Tracer sur le même repère la courbe de $f^{-1}(x)$
   e) Expliciter $f^{-1}(x)$
   f) Déterminer les coordonnées du point de rencontre de la fonction $f(x)$ et de $f^{-1}(x)$ par rapport à la première bissectrice

Exercice 5

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n par : $\forall\ xIR_+, f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n
2. Calculer $u_1\ et\ u_2$, puis montrer que $\forall n \in IN^*, u_n \in \left]0\ , \frac{2}{3}\right[$
3. Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

   En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de (u_n)

4. Montrer que (u_n) est convergente. On note l sa limite
5. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n$; donner enfin la valeur de l.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $[-1\ , 1] - \{0\}$ par : $f(x) = 1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé R.

Partie A :

1. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\ et\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$ et interpreter les resultats obtenus
2. Étudier la dérivabilité de f en 1 et interpréter le résultat obtenu
3. Étudier la dérivabilité de f en -1 et interpréter le résultat obtenu
4. Montrer que $\forall x \in [-1\ , 1] - \{0\}, f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
6. Montrer que f réalise une bijection de]0,1[sur un intervalle J que l'on précisera
7. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\ de\ J$
8. Représenter dans le même repère R la courbe $(C) et\ (C^{-1}) de\ f^{-1}$

Partie B

Soit ψ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\ par: \psi(x) = f(cosx)$

1. Montrer que pour tout $x\epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \psi(x) = 1 + \tan(x)$
2. Étudier le sens de variation de la fonction ψ

3. Montrer que l'équation $\psi(x) = x$ admet une unique solution α *dans* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et vérifier que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$
4. Montrer que ψ réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera
5. Montrer que ψ^{-1} est dérivable sur K et $\forall x \in (\psi^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1. Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$
2. Étudier la dérivabilité de f a droite en 1 et interpréter le résultat obtenu
3. Dresser le tableau de variation de f
4. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera
5. Montrer que pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{2x}$
6. On désigne par (C) *et* (C') les courbes de f *et* f^{-1} dans le même repère orthonormé. Montrer que la droite $(D): y = 2x$ est asymptote oblique a (C)
7. Tracer (C) *et* (C')
8. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ *par* $g(x) = f\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$

   8.1. Montrer que pour tout x *de* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[, g(x) = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$

   8.2. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera

   8.3. Montrer que g^{-1} est dérivable sur K et pour tout x de K : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{1+x^2}$

Exercice 8

Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$

1. Étudier les variations de f
2. On définit la suite (U_n) *par*: $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

   a) Montrer que $\forall\, n \in IN, -\frac{1}{3} \leq U_n \leq 0$

   b) Montrer que $\forall\, x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right], |f'(x)| \leq \frac{27}{98}$
3. On pose $\forall\, n \in IN, V_n = U_{2n}$ *et* $w_n = U_{2n+1}$; prouver que $|w_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |w_n - V_n|$
4. Montrer par récurrence que $\forall\, n \in IN, |w_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |w_0 - V_0|$
5. Montrer que (V_n) *et* (w_n) sont deux suites convergentes vers la même limite l.
6. En déduire que (U_n) est convergente vers l.

Exercice 9

Partie I : soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ $par: f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1,1[$, une solution unique α et que $\alpha > \frac{4}{5}$
3. En déduire le signe de $f(x) - x$.
4. Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur IR.
5. Montrer que pour tout x de IR on a : $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$

Partie II : Soit la suite u définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = [0, \alpha] \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout n de IN, $0 \leq u_n \leq \alpha$
2. Montrer que la suite u est croissante. Déduire que u est convergente et calculer sa limite
3. Montrer que pour tout $x \in IR_+$on a : $|(f^{-1})'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$
4. Montrer que pour tout n de IN on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$
5. En déduire que pour tout n de IN on a $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Partie III : Soit la fonction ψ définie sur $]-1,1[$ $par: \psi(x) = f\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$

1. Montrer que pour tout x de $]-1,1[$ $par: \psi(x) = -1 - \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
2. Montrer que ψ établit une bijection de $]-1,1[$ sur IR
3. Montrer que ψ^{-1} est dérivable sur IR et que $(\psi^{-1})'(x) = \frac{-2}{\pi(1+(x+1)^2)}$
4. Soit pour tout x *de* IR^* la fonction χ tel que $\chi(x) = \psi^{-1}(x-1) + \psi^{-1}\left(\frac{1}{x} - 1\right)$
   4.1. Montrer que χ est dérivable sur IR et déterminer $\chi'(x)$
   4.2. Calculer $\chi\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* $\chi\left(-\frac{1}{2}\right)$. En déduire que : $\begin{cases} \chi(x) = -1 \text{ si } x > 0 \\ \chi(x) = 1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
5. Pour tout n de IN on a :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\psi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + \psi^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right)\right) \ et\ w_n = \frac{v_n}{n}$$

   5.1. Donner la valeur $\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. En déduire que :

$$\forall\, k \in IN^*\ \psi^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + \psi^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$$

   5.2. Montrer que pour tout n *de* IN^*: $v_n = n - \psi^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$. En déduire que la suite w est convergente et donner sa limite

Exercice 10

I- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 2[\ par: f(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

1. Déterminer les réels a et b, tels que pour tout réel x de l'intervalle I :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$$

2. En déduire la primitive de f sur l'intervalle I qui s'annule en 1

II- Soit la fonction f définie sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\ par: f(x) = (x^2 + x + 1)\sqrt{3-2x}$

1. Montrer que $\boldsymbol{x^2} = \frac{(3-2x)^2}{4} - \frac{3(3-2x)}{2} + \frac{9}{4}$
2. Déterminer alors la primitive de f dans sur $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right[$ qui s'annule en 1.

III- On considère l'intervalle $J = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

1. Déterminer sur J une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{cos^2(x)}$
2. Montrer que la fonction G définie sur J par : $G(x) = \frac{\sin(x)}{cos^3(x)}$ est dérivable sur J et calculer sa dérivée première.
3. En déduire une primitive sur J de la fonction $f(x) = \frac{1}{cos^4(x)}$

IV- 1-Déterminer les réels a, b et c tels que : $P(x) = \frac{4x^2 - 2x + 9}{x^3 - 2x^2 + 3x - 6} = \frac{ax+b}{x^2+3} + \frac{c}{x-2}$.

2-En déduire une primitive de P(x) sur $]-\infty; 2[$.

<<la connaissance s'acquière avec l'expérience le reste n'est qu'information>>

Albert EINSTEIN

<u>Par</u> : M. Bernard ELONG BANGA

******Leaders préparations examens et concours : Aujourd'hui mieux qu'hier et demain plus qu'aujourd'hui******

LEADERS PREPARATIONS