Fomesoutra.com ça soutra!

MATHEMATIQUES

Niveau : Tle D
Prof. : M. TEHUA
Date :

Cette fiche comporte trois (0 3) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.

DERIVABILITE ET ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 1

Déterminer la fonction dérivée g' de la fonction numérique g dans chacun des cas suivants :

1) $g(x)=\sqrt{x^2-3}$; 2) $g(x)=\sin\left(x^3-2\right)$; 3) $g(x)=x\sqrt{2-x^2}$; 4) $g(x)=\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$;

5) $g(x)=\sqrt{\frac{2+x}{1-x}}$; 6) $g(x)=\left(2-\sin(5x)\right)^3$; 7) $g(x)=\frac{1}{\tan x}$.

EXERCICE 2

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\sqrt{x}\,(2x-1)$ 2) $f(x)=\frac{1}{x-3}-\frac{2x}{x+1}$ 3) $f(x)=-\frac{1}{2}x-1+2\sqrt{x^2+1}$

4) $f(x)=\frac{1}{2}\left(-1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ 5) $f(x)=(2x-1)^3$ 6) $f(x)=-\frac{x^2+1}{3}$

EXERCICE 3

Pour chacun des cas suivants, étudier la continuité et la dérivabilité de f au point a indiqué, et donner si possible une interprétation graphique (*dans un repère orthogonal (O, I, J)*).

1) $\begin{cases} f(x)=-x^3-4 & si\ x<0 \\ f(x)=2\sqrt{3x+9} & si\ x\geq 0 \end{cases}$ $a=0$; 2) $\begin{cases} f(x)=x^2 & si\ x\in\left]-\infty;1\right] \\ f(x)=\frac{1}{x} & si\ x\in\left]1;+\infty\right[\end{cases}$ $a=1$

3) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ $a=-1$; 4) $\begin{cases} f(x)=x\sqrt{x+1} & \text{si } x<0 \\ f(x)=1-\frac{1}{x+1} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$ $a=0$.

EXERCICE 4

Soit h la bijection de $\left]0;+\infty\right[$ sur $\left]0;+\infty\right[$ définie par $h(x)=\frac{1}{x}$.

1) Calculer $h\left(\frac{1}{2}\right)$

2) Sachant que h^{-1} est dérivable en 2, calculer $\left(h^{-1}\right)'(2)$.

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calcule sa dérivée.

a) $f(x)=(x^2-3x+1)^5$; b) $f(x)=\sqrt{x^2+3x+5}$; c) $f(x)=\cos(x^2)$

d) $f(x)=\sin(\sin x)$; e) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

EXERCICE 6

Justifie que : $\frac{1}{\sqrt{19}} \leq \sqrt{19} - \sqrt{17} \leq \frac{1}{\sqrt{17}}$

EXERCICE 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 + x \; si \; x < 0 \\ f(x) = \sqrt{x} - x \; si \; x \geq 0 \end{cases}$

On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Etudie la continuité de f en 0.
2. Etudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement les résultats obtenus.
3. a) Calcule les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Justifie que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

4. On admet que f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.
   Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Trace (C) et les demi-tangentes obtenues dans la question b).

EXERCICE 8

f est la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. Calcule la limite de f en $+\infty$.
   Interprète graphiquement le résultat.
2. Calcule la limite de f en $-\infty$.
3.
   a) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -2x$ est asymptote à (C) en $-\infty$.
   b) Etudie la position de (C) par rapport à (D).
4. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.
5. Trace (D) et (C).

EXERCICE 9

f est la fonction définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

Partie A

g est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2-1}$

1. Calcule la limite de g en $+\infty$.
2. Etudie les variations de g et dresse son tableau de variation.
3.
   a) Démontre que l'équation $x \in]1; +\infty[, g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.

   b) Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. Justifie que : $\begin{cases} \forall x \in]1\,; \alpha[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]\alpha\,; +\infty[, g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

1. Etudie la parité de f.
2.
   a) Calcule la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -\frac{x}{2}+1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
   c) Etudie la position de (C) par rapport à (D) sur $]1; +\infty[$.
3. Etudie la dérivabilité de f en 1 puis interprète graphiquement le résultat.
4.
   a) Démontre que : $\forall\, x \in]1\,; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$
   b) Dresse le tableau de variation de f.
5. Démontre que : $f(\alpha) = -\frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\alpha^3}$.

EXERCICE 10 (SITUATION COMPLEXE)

En visite dans une usine de fabrication et de commercialisation de sachets de poudre de cacao des élèves d'une classe de Terminale scientifique reçoivent les informations suivantes :

« La capacité journalière de production de l'usine est comprise entre 1 000 et 5 000 sachets. Toute la production journalière est commercialisée. Une étude a révélé que le bénéfice journalier, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 5] par la fonction B définie par : $\mathrm{B}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + 2$ ».

Le Directeur de l'usine veut accroître le bénéfice de l'entreprise. N'ayant pas de personnel qualifié, il te demande le nombre de sachets à produire en un jour, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.