MATHEMATIQUES

Niveau : Tle D
Prof : M. TEHUA
Date :

Cette fiche comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2

SEANCE DE RENFORCEMENT MATHS : 31 Janvier 2026

EXERCICE 1

On donne : $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

1) a- Calculer P(1) et P (-1).

   b- Trouver le polynôme Q tel que P(x) = $(x^2 - 1)Q(x)$

   c- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation P(x) = 0.

2) Déduire de la question 1), la résolution dans $\mathbb{R}$ de chacune des inéquations suivantes :

   a) $(I_1): (lnx)^3 - 3(lnx)^2 - lnx + 3 \leq 0$; b) $(I_2): (\ln(1-x))^3 - 3(\ln(1-x))^2 - \ln(1-x) + 3 \leq 0$

EXERCICE 2

A/ Soit la fonction g définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{3x^2-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$

1) Déterminer les réels a, b et c tels que $\forall x \in]1\,;+\infty[$ $g(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.

2) En déduire la primitive G de g qui s'annule en 0.

B/ Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{6x-4}{(2x-1)^3}$

1) Déterminer les nombres réels a et b tel que $\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f(x) = \frac{a}{(2x-1)^2} + \frac{b}{(2x-1)^3}$

2) Déterminer la primitive F de f sur I qui prend la valeur 0 en 1.

C/ Soit f et g les fonctions définies sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ et $g(x) = (ax+b)\sqrt{1+x}$

   Déterminer les réels a et b pour que g soit une primitive de f.

SITUATION COMPLEXE

Les pertes d'une entreprise due à la pandémie à coronavirus s'expriment par : $f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$ où x est la quantité de marchandise mise sur le marché en millions de tonnes. Le chef d'entreprise veut estimer la quantité de marchandise qu'il doit éviter de mettre sur le marché, car occasionnant une perte maximale. Il te sollicite pour l'aider et te promet de t'octroyer une bourse mensuelle de 30.000 F CFA. A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation du chef d'entreprise.

ETUDE DE FONCTIONS

Partie A

Soit la fonction g dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - \ln x - 1$.

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$

3) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4) a- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0\,;+\infty[$.

b- On désigne par α la plus petite des solutions. Démontrer que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

c- Calculer g (1).

d- En déduire que, pour tout nombre réel strictement positif x : $\begin{cases} si, x \in]0\,;\alpha[\cup]1\,;+\infty[, \text{alors } g(x) > 0 \\ si, x \in]\alpha;1[, \text{alors } g(x) < 0 \end{cases}$

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

L'unité est 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

1) a- Déterminer la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

b- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) Démontrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

3) a- Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

b- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5) Etudier la position de (D) par rapport à (C).

6) Tracer (D) et (C). On prendra : $\alpha = 0{,}45$ et $f(\alpha) = 3{,}1$.