Fomesoutra.com
ça soutra!

Le Groupe Scolaire Les Figuiers
Le Collège Le Figuier

Humilité - Discipline - Travail

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
DIRECTION REGIONALE ABIDJAN 1
GROUPE SCOLAIRE LES FIGUIERS
COLLEGE LE FIGUIER ABIDJAN
DIRECTION DES ETUDES DU SECOND

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union-Discipline-Travail

FICHE D'EXERCICES

Année : 2026-2027
Niveau : Tle D
Séances : 6 à 9
CE MATHS

MATHEMATIQUES

Cette fiche comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4. L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

Leçon 3 : Dérivabilité et étude de fonctions

Compétence 1 – Thème 1 : Étude de fonctions numériques – Séances d'exercices

---

Exercice 1 *(1. Dérivabilité à gauche – dérivabilité à droite)*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par : $f(x)=\dfrac{1-|1-x|}{x+2}$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Calculer $f(1)$.
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1.
3. f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
4. Donner une équation de chacune des demi-tangentes à (C) au point d'abscisse 1.

Exercice 2 *(1. Dérivabilité à gauche – dérivabilité à droite)*

Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

1. Démontrer que f est continue en 0.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0.
3. a) Démontrer que pour tout $x\in[-1;+\infty[\setminus\{0\}$: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$.
   b) Étudier la dérivabilité de f à droite en -1, puis interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 3 *(1. Dérivabilité à gauche – dérivabilité à droite)*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2+x & \text{si } x<0 \\ f(x)=\sqrt{x}-x & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$
On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. On admet que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

5. Tracer (C) et les demi-tangentes obtenues à la question 2.

Exercice 4 *(1. Dérivabilité – tangente – étude de fonction)*

---

f est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la continuité de f en 0.
3. Démontrer que (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente dont on précisera une équation.
4. Étudier la parité de f et en donner une conséquence graphique.
5. Calculer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
6. Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.
7. Tracer la courbe (C).

Exercice 5 *(1. Dérivabilité à droite – 3. Dérivée d'une fonction composée)*

Soit la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$ par : $f(x) = (4x-1)\sqrt{4x-1}$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

1. Calculer les limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\dfrac{f(x)}{x}$, puis interpréter graphiquement les résultats.
2. Étudier la dérivabilité de f en $\frac{1}{4}$.
3. On admet que f est dérivable sur $\left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$.
   a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\left]\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$.
   b) Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
4. Tracer (C) et sa tangente au point d'abscisse $\frac{1}{4}$.

Exercice 6 *(3. Fonctions composées – 5. Dérivées successives)*

---

1. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de dérivabilité de f, puis calculer $f'(x)$:
   a) $f(x) = (2x^2 - x + 3)^5$ b) $f(x) = \sqrt{6-2x}$ c) $f(x) = \cos(3x^2+1)$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-4)^3}$ e) $f(x) = \tan(2x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin(2x)$.
   a) Calculer $g'(x)$, $g''(x)$, $g^{(3)}(x)$ et $g^{(4)}(x)$.
   b) Vérifier que pour tout réel x : $g''(x) + 4g(x) = 0$, puis exprimer $g^{(4)}$ en fonction de g.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
   Calculer $h'(x)$, $h''(x)$ et $h^{(3)}(x)$, puis conjecturer l'expression de $h^{(n)}(x)$ pour tout entier naturel non nul n.

Exercice 7 *(6. Point d'inflexion)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

1. Démontrer que pour tout réel x : $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
2. Démontrer que pour tout réel x : $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$.

---

3. Étudier le signe de $f''(x)$. En déduire que (C) admet trois points d'inflexion dont on précisera les coordonnées.
4. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point O.
5. Étudier les variations de f, puis tracer (T) et (C).

Exercice 8 *(4. Dérivabilité d'une bijection réciproque)*

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Soit φ la restriction de f à $[-1\,;+\infty[$.
   a) Démontrer que φ réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
   b) Calculer $\varphi(0)$.
   c) Démontrer que la bijection réciproque φ^{-1} de φ est dérivable en $\sqrt{3}$ et calculer $(\varphi^{-1})'(\sqrt{3})$.

Exercice 9 *(1. Demi-tangentes – 4. Bijection réciproque)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) (l'unité graphique est 2 cm). Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;-1]\cup[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = x+\sqrt{x^2-1}$. On note (C) la courbe représentative de f.

1. Démontrer que (C) admet aux points d'abscisses respectives -1 et 1 une demi-tangente parallèle à (OJ).
2. Démontrer que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $-\infty$.
3. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
   c) Étudier la position de (C) par rapport à (D).
4. On admet que f est dérivable sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]1\,;+\infty[$. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
5. Tracer (C) et (D).
6. Soit h la restriction de f à $]-\infty\,;-1]$.
   a) Justifier que h est une bijection de $]-\infty\,;-1]$ sur $[-1\,;0[$.
   b) Calculer $h(-\sqrt{2})$.
   c) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h. Démontrer que h^{-1} est dérivable en $1-\sqrt{2}$ et calculer $(h^{-1})'(1-\sqrt{2})$.

Exercice 10 *(7. Inégalité des accroissements finis)*

---

1. Soit x un nombre réel strictement positif.
   a) Démontrer que pour tout $t \in [x\,;x+1]$: $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{t}} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   b) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[x\,;x+1]$, démontrer que :
   $$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
   c) En déduire un encadrement du nombre $\sqrt{10001}-100$.
2. a) Démontrer que pour tous nombres réels a et b : $|\sin b - \sin a| \leq |b-a|$.
   b) En déduire que pour tout nombre réel x : $|\sin x| \leq |x|$.

Exercice 11 *(Problème de synthèse)*

---

f est la fonction définie sur $]-\infty\,;-1]\cup[1\,;+\infty[$ par : $f(x) = -\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J).

Partie A

g est la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = 2 - x^2\sqrt{x^2-1}$.

1. Calculer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.
3. a) Démontrer que l'équation $x \in]1\,;+\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.
   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. Justifier que : pour tout $x \in]1\,;\alpha[$, $g(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha\,;+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

1. Étudier la parité de f. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[1\,;+\infty[$.
2. a) Calculer la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -\dfrac{x}{2} + 1$ est asymptote à (C) en $+\infty$.
   c) Étudier la position de (C) par rapport à (D) sur $[1\,;+\infty[$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 1, puis interpréter graphiquement le résultat.
4. a) Démontrer que pour tout $x \in]1\,;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2\sqrt{x^2-1}}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.
5. Démontrer que : $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{2}{\alpha^3}$.
6. Tracer (D), la droite (D′) d'équation $y = -\dfrac{x}{2} - 1$ et la courbe (C).

Exercice 12 *(Situation complexe)*

Une coopérative de transformation de cacao de Soubré souhaite commercialiser sa poudre de cacao dans des boîtes métalliques cylindriques fermées (avec fond et couvercle), de contenance 1 litre, soit 1 000 cm^3. Pour une première commande de 10 000 boîtes, l'atelier de fabrication propose un modèle de rayon 4 cm.
La tôle utilisée coûte 0,5 franc CFA le cm^2, et l'on néglige les chutes de tôle et les soudures.
Lors de la réunion du bureau, le trésorier affirme qu'en choisissant mieux les dimensions des boîtes, tout en gardant la même contenance, la coopérative peut économiser plus de 200 000 francs CFA sur cette commande.
Le président, sceptique, sollicite ton aide.

Tâche : En utilisant tes connaissances mathématiques, dis si le trésorier a raison.