Fiche d'exercices d'application

Terminale D – Mathématiques – Thème : Fonctions numériques

Côte d'Ivoire – École Numérique

Consignes. Cette fiche regroupe les exercices d'application (exercices de fixation) de chaque cours. Cherche chaque exercice sur ton cahier avant de regarder la correction. Rédige proprement : *on écrit ce qu'on utilise, puis on calcule, puis on conclut.*

Nom : _____ Date : _____

Partie I – Leçon 1 : Limites et continuité d'une fonction

Exercice 1 • Limite d'une fonction composée

1. Calcule la limite en $+\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \sqrt{4 + \dfrac{2}{x^2+1}}$.
2. Calcule la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$.

Exercice 2 • Limite d'une fonction monotone

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Sachant que : $\forall x \in [1\,;+\infty[,\ f(1) \leq f(x) \leq -\dfrac{1}{x} + 1 + f(1)$.

Justifie que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et donne un encadrement de ℓ.

Exercice 3 • Branche parabolique

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{2}{x-1} - \sqrt{x+1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Démontre que (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OI).

Exercice 4 • Prolongement par continuité

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x-5}-2}$.

   Démontre que f admet en 9 un prolongement par continuité φ, et définis-le.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\,;0\,;1\}$ par : $g(x) = \dfrac{x^2+x}{x^2-|x|}$.

   g est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Justifie ta réponse.

Exercice 5 • Image d'un intervalle par une fonction continue

Détermine l'image de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ par la fonction cosinus.

Exercice 6 • Image d'un intervalle (avec un tableau de variation)

Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et continue sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-2	↗	5	↘	‖	↘	1
					$+\infty$		

Détermine l'image par f de chacun des intervalles suivants : $]-\infty\,;-1]$, $]0\,;+\infty[$ et $[-1\,;0[$.

Exercice 7 • Continuité : opérations sur les fonctions

Soient g et h deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 + \sin x$ et $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

1) Justifie que g est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Justifie que h est continue sur $]-\infty\,;-1]$.

Exercice 8 • Continuité d'une fonction composée

Soient g et f deux fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$ et $f(x) = \cos x$.
Justifie que $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 • Bijection et sens de variation de la réciproque

Soit $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

1. Démontre que f est une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

2. Déduis-en le sens de variation de la bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 10 • Bijection et expression de la réciproque

Soit la fonction $g : [1\,;3] \to [0\,;4],\ x \mapsto -x^2 + 2x + 3$.

1. Démontre que g est une bijection.

2. Détermine l'expression explicite de la bijection réciproque g^{-1} de g.

Exercice 11 • Théorème des valeurs intermédiaires (tableau)

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f définie et continue sur $[-1\,;+\infty[$.

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	5 ↘	$-\infty$

1. Justifie que l'équation $f(x) = -10$ admet une unique solution dans $[-1\,;+\infty[$.
2. L'équation $f(x) = 13$ admet-elle une solution dans $[-1\,;+\infty[$? Justifie ta réponse.

Exercice 12 • Existence et unicité d'une solution

Démontre que l'équation $x \in]0\,;1[,\ 2x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une unique solution α.

Exercice 13 • Valeur approchée d'une solution

L'équation $x \in]0\,;1[,\ 2x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une unique solution α (exercice précédent).
Donne une valeur approchée de α à 10^{-1} près :

a) par la **méthode de balayage** (pas de 0,1) ;

b) par la **méthode de dichotomie**.

Exercice 14 • Racine n-ième et puissance rationnelle

1. Soit a un nombre réel strictement positif. Mets sous la forme a^α où α est un nombre rationnel, les nombres réels suivants :

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}\ ; \qquad \frac{a^3}{\sqrt{a^{0,4}}}\ ; \qquad \sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a}.$$

2. Justifie que : $\dfrac{4 \times \sqrt[10]{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{256}}} = 2\sqrt{2}$.

3. Justifie que pour tous nombres réels a et b strictement positifs : $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt{\sqrt[3]{ab^5}} = ab$.

Partie II – Leçon 3 : Dérivabilité et étude de fonctions

Exercice 1 • Dérivabilité à gauche et à droite en un point

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\,;2\}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;0[\cup]0\,;1], \quad f(x) = \dfrac{1}{x-2} \\ \forall x \in [1\,;2[\cup]2\,;+\infty[, \quad f(x) = \dfrac{-1}{x} \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Étudie la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1.
2. Interprète graphiquement les résultats.
3. Trace les demi-tangentes à (C) au point d'abscisse 1.

Exercice 2 • Dérivabilité en un point (fonction définie par morceaux)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;0[, \quad f(x) = x^2 \\ \forall x \in [0\,;+\infty[, \quad f(x) = x^3 \end{cases}$

Justifie que f est dérivable en 0.

Exercice 3 • Demi-tangente verticale

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x} - x$.
On note (C) la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Étudie la dérivabilité de f en 0 puis interprète graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 4 • Dérivabilité d'une fonction composée en un point

Soient les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$ et $g(x) = x - \dfrac{1}{x} + 2$.
Démontre que $f \circ g$ est dérivable en 3 et calcule $(f \circ g)'(3)$.

Exercice 5 • Calcul de dérivées (fonctions composées)

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule sa dérivée.

a) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^5$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$

c) $f(x) = \cos(x^2)$

d) $f(x) = \sin(\sin x)$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 6 • Dérivabilité en un point puis calcul de la dérivée

Soit la fonction f définie sur $[\frac{1}{4}\,;+\infty[$ par : $f(x) = (4x-1)\sqrt{4x-1}$.

1. Étudie la dérivabilité de f en $\dfrac{1}{4}$.
2. On admet que f est dérivable sur $]\frac{1}{4}\,;+\infty[$. Calcule $f'(x)$ pour tout x de $]\frac{1}{4}\,;+\infty[$.

Exercice 7 • Dérivabilité d'une bijection réciproque

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x$.

1. Démontre que f réalise une bijection de $]-\infty\,;\frac{1}{2}]$ sur $[-\frac{1}{4}\,;+\infty[$.
2. Soit g la restriction de f à $]-\infty\,;\frac{1}{2}]$. Démontre que g^{-1} est dérivable en 2 et calcule $(g^{-1})'(2)$.

Exercice 8 • Dérivées successives

Détermine les 4 premières dérivées successives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.

Exercice 9 • Inégalité des accroissements finis (encadrement)

Justifie que : $\dfrac{1}{\sqrt{19}} \leq \sqrt{19} - \sqrt{17} \leq \dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Exercice 10 • Inégalité des accroissements finis (valeur absolue)

Démontre que, pour tous nombres réels x et y, on a : $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.