L.C.A

Fomesoutra.com ça soutra!

COMPOSITION DU 1er TRIMESTRE

MATHÉMATIQUES

Tle D

Durée : 2 h

Exercice 1

(5 points)

Écris le numéro de chaque affirmation suivi de vrai si l'affirmation est vraie et faux si elle est fausse.

1. Si f est une fonction telle que $\forall x \neq -1,\quad 2 - \frac{x^2-1}{x^2+x} \leq f(x) \leq 3 - \frac{\sqrt{x}}{x+1}$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$.
2. $\lim\limits_{x\to 1} \sin\left(\frac{\pi x}{4} - 1\right)$ est égale à $\frac{1}{4}$.
3. La courbe de la fonction qui $x \mapsto x^4$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0$.
4. $f \circ g$ est dérivable sur un intervalle ouvert K, $x_0 \in K$, si g est dérivable en x_0 et f est dérivable en $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est dérivable en $g(x_0)$.

Exercice 2

(4 points)

Le tableau suivant comporte quatre affirmations et quatre réponses notées A, B, C et D.
Une seule est correcte. Écris sur ta copie le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses A	Réponses B	Réponses C	Réponses D
1	On dispose d'un dé cubique dont les faces numérotées de 1 à 6 soit $i \in \{1;2;3;4;5;6\}$. $P_3 = P_4$; $P_1 = 3P_3$; $P_2 = 2P_3$; $P_5 = 2P_3$ et $P_6 = 2P_3$. La probabilité P_3 =	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{5}$
2	Deux événements A et B sont indépendants signifie que	$P(A \cup B) = P(A) \times P(B)$	$P(A/B) = P(B)$ avec $P(A) \neq 0$	$P(B/A) = P(A)$ lorsque $P(B) \neq 0$	$P(A/B) = P(A)$ lorsque $P(B) \neq 0$
3	On appelle schéma de Bernoulli une suite de n	Épreuves de Bernoulli ou indépendants	Schémas de Bernoulli indépendants	Épreuves de Bernoulli indépendantes	Rien de tout ce qui précède
4	x_i | -1 | 0 | 2 ; $P(X = x_i)$ | $0{,}01$ | $0{,}92$ | $0{,}07$; L'espérance mathématique $E(X)$ de X est égale à	0,13	0,12	− 0,13	− 0,12

Exercice 3

(3 points)

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x + \sin 2x$.
   Démontre que $\frac{d^3g}{dx^3}(x) = -4\,g'(x)$.
2. Soit la fonction h deux fois dérivable et définie par $h(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
   Justifie que la courbe de h admet un point d'inflexion, et détermine les coordonnées de ce point.

Exercice 4

(5 points)

On considère la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = |x|\sqrt{1+x}$.

1. Justifie que : $\forall x \in [-1;0[,\ f(x) = -x\sqrt{1+x}$ et $\forall x \in [0;+\infty[,\ f(x) = x\sqrt{1+x}$.
2. a) Étudie la continuité de f en 0. b) Étudie la continuité de f à droite en -1.
3. a) Étudie la dérivabilité de f en 0 et à droite en -1.
   b) Interprète graphiquement les résultats obtenus.
4. a) Démontre que : $\forall x \in [-1;0[,\ f'(x) = \frac{-2-3x}{2\sqrt{1+x}}$ et $\forall x \in [0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{2+3x}{2\sqrt{1+x}}$.
   b) Dresse le tableau de variations de f.
5. a) Soit g la restriction de f à $\left[-\frac{2}{3};0\right]$. Démontre que g est une bijection de $\left[-\frac{2}{3};0\right]$ sur un intervalle J à déterminer.
   b) Calcule $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ puis $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Exercice 5

(3 points)

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école. Ce test a donné les résultats suivants :

- 75% des bacheliers sont admis ;
- 52% des non bacheliers sont admis.

1. On choisit au hasard un élève de la population. On note B : « l'élève est bachelier », T : « l'élève est admis ».
   Calcule $P(B)$, $P_B(T)$ et $P_{\bar{B}}(T)$.
2. Démontre que la probabilité de l'évènement A : « l'élève est bachelier et est admis au Bac » est 0,3.
3. Démontre que B et T ne sont pas indépendants.
4. Démontre que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égale à $\frac{25}{51}$.

Exercice 6

(4 points)

Pendant les vacances, tu travailles dans une société de fabrication de parapluie en zone industrielle à Abidjan.
Cette société fabrique chaque jour x parapluies avec $x \in [0;60]$ le coût total de production de ces parapluies, exprimé en milliers de francs est donné par : $f(x) = x^2 - 81x$.
Chaque parapluie fabriqué est vendu au prix unitaire de 3 000 Francs tout le même jour.
L'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal, mais ne sait pas quelle quantité de parapluie elle doit fabriquer.

1. Exprime le bénéfice $B(x)$ en fonction de x.
2. Détermine la quantité de parapluies à fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal, et calcule ce bénéfice maximal.