DEVOIR DE NIVEAU
NIVEAU: $\mathbf{T}^{\mathbf{le}\ \mathbf{D_1}\ \&\ \mathbf{D_2}}$
Année-Scolaire : 2022-2023

MATHÉMATIQUES

Coefficient : 4
Durée : 3 heures
CE. MATHEMATIQUE
Date : 19 / 10 / 2022

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1; 2 et 3.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1 (2 points)

Pour chacune des propositions suivantes, dis si elle est vraie (V) ou fausse (F).

N°	Propositions
1	Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a\,;b]$ alors $f([a\,;b]) = [f(b); f(a)]$
2	Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[-2\,;3]$ et si $f(-2) \times f(3) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $]-2\,;3[$.
3	Soit une fonction $S(x)$ et sa bijection réciproque $S^{-1}(x)$. Leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la droite d'équation $\frac{1}{y} = \frac{1}{x}$
4	Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, on dit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ)

EXERCICE 2 (2 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Écris sur ta copie le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la bonne réponse.

N°	Énoncés	Réponses	
1	Soit f une fonction et α un nombre réel. S'il existe une fonction g telle que $f \geq g$ sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$	A	0
		B	$-\infty$
		C	$+\infty$
		D	α
2	$a \in \mathbb{R}_+ , b \in \mathbb{R}_+, \sqrt[3]{\sqrt{a^5 b}} \times \sqrt{\sqrt[3]{ab^5}}$	A	a^5b^5
		B	ab
		C	$a^{12}b^{11}$
		D	a^4b^3
3	$f\ et\ g$ sont deux fonctions. $a, b\ et\ l$ sont des nombres reels, soit $-\infty\ soit + \infty$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b\ \ et\ \ \lim\limits_{x\to b} g(x) = l$, alors	A	$\lim\limits_{x\to b}(fog)(x) = -\infty$
		B	$\lim\limits_{x\to a}(gof)(x) = l$
		C	$\lim\limits_{x\to b}(fog)(x) = l$
		D	$\lim\limits_{x\to a}(gof)(x) = b$
4	Si pour tout nombre réel x non nul, $3 - \frac{1}{x} < f(x) < \frac{1}{x} + 3$, alors la limite de f en $+\infty$ est égale à :	A	0
		B	$-\infty$
		C	3
		D	$+\infty$

EXERCICE 3 (3 points)

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$.

1. Démontrer que : $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

2. Démontrer que $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[: 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

3. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaisons, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions f suivantes (si elles existent).

a) $f(x) = \frac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$; b) $f(x) = \frac{x \sin x}{x^2+1}$

EXERCICE 4 (4 points)

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^3 - 12x + 10$.

1. a) Étudier le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions α, β *et* γ *sur* $\mathbb{R}$ tels que : $\alpha < \beta < \gamma$

a) Vérifier que $\beta \in]0\ ;\ 1[$.

b) Encadre β par deux nombres décimaux consécutifs à 10^{-2} près.

3. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]2\ ;+\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de $]2\ ;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

b) On note g^{-1} sa bijection réciproque, dresser le tableau de variation de g^{-1}.

EXERCICE 5 (5 points)

Une fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ et a pour tableau de variation suivant :

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J)

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$			0		‖		
$f(x)$	-2	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

1. Déterminer D_f

2. Justifier que (C) admet deux asymptotes que l'on précisera.
3. Démontrer que (C) admet une branche parabolique dont on précisera.
4. Déterminer $f(]-\infty\,;1])$, $f([1\,;2[)$ et $f(]2\,;\,+\infty[)$.
5. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution unique α dans $\mathbb{R}$.
6. Démontrer que : $\forall x\in\,]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;\,\alpha[\,,f(x)<0$ et $\forall x\in\,]\alpha\,;+\infty[\,,f(x)>0$.
7. Donner l'allure générale de (C). On donne $\alpha\approx 3,4$.

EXERCICE 6 (4 points)

Un cordonnier fabrique des sacs à main. Il réussit à vendre tous ses sacs chaque mois à des touristes. Sa marge bénéficiaire mensuelle en centaines de francs est modélisée par la function $B(x)=x^3-\frac{75}{2}x^2+450x+150$, x représentant le nombre de sacs fabriqués et vendus. Il aimerait connaître l'intervalle de sa marge bénéficiaire pour un nombre de sacs fabiqués compris entre 5 et 17.
En te basant sur tes connaissances mathématiques et à l'aide d'un raisonnement coherent, aide ce cordonnier à répondre à sa préoccupation.