DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 du 3ème Trimestre

MATHÉMATIQUES

Année Scolaire : 2023-2024
Coefficient : 4
Durée : 2 H
Niveau : Tle-D
Prof : M. KALLO

Cette épreuve comporte deux (2) pages numérotées 1/2 et 2/2
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé

EXERCICE 1 (2 points)

Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de Vrai si l'affirmation vraie ou de **faux** si l'affirmation est fausse .

N°	Affirmation
1.	L'ensemble de définition de la fonction exponentielle népérienne est $\mathbb{R}$
2.	$\forall\, z \in \mathbb{C}^*$ et $\forall\, z' \in \mathbb{C}^*$, on a $arg(z \times z') = arg(z) \times arg(z') + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
3.	Le nombre e^{-2024} est positif
4.	Pour tout nombre réel x , $(\cos x + i \sin x)^5 = \cos^5 x + \sin^5 x$

EXERCICE 2 (3 points)

Pour chaque énoncé du tableau ci -dessous, les informations des colonnes **A, B . C** et **D** permettent d'obtenir quatre affirmations dont une seule est vraie.
Ecris, sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre de la colonne qui donne l'affirmation vraie.

N°	Affirmation incomplète	Réponses	
1.	La dérivée de la fonction : $x \mapsto (-2x+1)e^{-x}$ est….	**A**	$(2x-1)e^{-x}$
		B	$(-2x-3)e^{-x}$
		C	$(2x-3)e^{-x}$
		D	$(-2x+1)e^{-x}$
2.	$\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{x}+\frac{1}{2}\right]$ est égale à …	**A**	$+\infty$
		B	0
		C	$-\infty$
		D	$\frac{1}{2}$
3.	On pose : $z = -\sqrt{3} + i$ On note r le module de z et θ l'argument principale de z . r et θ vérifient ….	**A**	$r = 2$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$
		B	$r = 2$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$
		C	$r = 2$ et $\theta = -\frac{5\pi}{6}$
		D	$r = 1$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$
4.	La forme exponentielle du nombre complexe $-1+i$ est	**A**	$2e^{i\frac{\pi}{4}}$
		B	$\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
		C	$2e^{-i\frac{3\pi}{4}}$
		D	$\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

EXERCICE 3 **(5 points)**

1. On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P défini par : $P(z) = iz^3 + (5-2i)z^2 - (4+9i)z - 9 - 6i$

a) Justifie que $3i$ est une solution de l'équation : $P(z) = 0$

b) Détermine les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-3i)\left(iz^2 + az + b\right)$

2. a) Calcule $(2+i)^2$

b) Résous $\mathbb{C}$ dans l'équation (E): $iz^2 + (2-2i)z + 2 - 3i = 0$

c) Déduis des questions $1.a)$ et $1.b)$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$

3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3 + 2i$

a) Détermine z_K l'affixe du point K milieu du segment $[AB]$

b) On désigne par $(\mathcal{F})$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $|z - 1 - i| = \sqrt{5}$
Justifie que le point B appartient à $(\mathcal{F})$

c) Détermine $(\mathcal{F})$

EXERCICE 4 **(5 points)**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{1-x} - x + 1$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I , J)

L'unité graphique est le centimètre

1- On admet que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$
Interprète graphiquement ces résultats.

2- a) Calcule la limite de f en $+\infty$
b) Justifie que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$

3- Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{1-x} + 1$
On admet qu'il existe un nombre réel α élément de l'intervalle $[-0{,}4\ ;\ -0{,}2]$ tel que $g(\alpha) = 0$ et
$$\begin{cases} \forall x \in\ ]-\infty\,;\alpha[\ ; & g(x) < 0 \\ \forall x \in\ ]\alpha\ ;+\infty[\ ; & g(x) > 0 \end{cases}$$
On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

a) Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -g(x)$

b) Etudie le sens de variation de f .

c) Dresse le tableau de variation de f.

4- On admet que $(\mathcal{C})$ est au –dessus de (D) sur $[-1\ ;\ +\infty[$ et au –dessous de (D) sur $]-\infty; -1]$
Construis $(\mathcal{C})$ (tu prendra $\alpha = -0{,}3$ *et* $f(\alpha) = 3{,}9$)

EXERCICE 4 **(5 points)**

Un élève, en classe de 3ème du collège Eulalie Blah , est déclaré vainqueur à un concours de mathématiques.
Pour le récompenser ; l'ONG MEMA lui verse , pendant douze mois , une somme d'argent dont le montant initial est de 25 000 F et cela à partir du 03 janvier 2024 (premier mois) .
Le versement augmente de 6% du précédent versement à partir du deuxième mois jusqu'au douzième mois .
Il souhaite , à la fin du douzième mois, utiliser la somme totale reçue pour acheter un ordinateur d'un coût de 500 000 F.
Son père promet de donner la différence lui permettant d'acheter l'ordinateur , si la somme versée atteint au moins 400 000 F. L'élève se demande s'il pourra acheter l'ordinateur.
A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, dis si l'élève pourra bénéficier de l'aide de son père pour acheter l'ordinateur ou non.

CORRIGE	BAREME
EXERCICE 1 **(2 points)** **1. Vrai ; 2-Faux ; 3-Vrai ; 4-Fau**	$4 \times 0,5\, pts$
EXERCICE 2 **(3 points)** **1-C ; 2-D ; 3-A ; 4-B**	$4 \times 0,75\, pts$
EXERCICE 3 **(5 points)** **1- a) Justifions que $3i$ est une est une solution de** (E) $P(3i) = 0$ donc $\mathbf{3i}$ est une solution de l'équation $P(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$	$0,5\, pt$
b) Déterminons les nombres complexes a et b tels que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-3i)\left(iz^2 + az + b\right)$ $\begin{cases} a = 2-2i \\ b = 2-3i \end{cases}$ donc $P(Z) = (z-3i)\left[i\, z^2 + (2-2i)z + 2 - 3i\right]$	$1\, pt$
2- a) Calculons $(\mathbf{2}+\boldsymbol{i})^{\mathbf{2}}$ $(2+i)^2 = 3+4i$	$0,5\, pt$
b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ dans l'équation (E): $\boldsymbol{iz^2 + (2-2i)z + 2 - 3i = 0}$ $\Delta = -4(3+4i) = [\,2i\ (2+i)\,]^2$ $\begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 3+2i \end{cases}$ donc $\boldsymbol{S_{\mathbb{C}} = \{-1\,;\ 3+2i\ \}}$	$1\, pt$
c) **Déduisons des questions $1.a)$ et $1.b)$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(\mathrm{z}) = 0$** $S_{\mathbb{C}} = \{-1\,;\ \ 3i\ \ ;\ \ 3+2i\ \}$	$0,5\, pt$
3- a) Déterminons z_K l'affixe du point K milieu du segment $[AB]$ $z_K = \frac{z_A + z_B}{2} = 1+i$	$0,5\, pt$
b) Justifions que le point B appartient à $(\mathcal{F})$ $B \in (\mathcal{F}) \Leftrightarrow \lvert z_B - 1 - i \rvert = \sqrt{5}$ On : $\lvert z_B - 1 - i\rvert = \lvert 3 + 2i - 1 - i\rvert = \lvert 2 + i\rvert = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ Donc **le point B appartient à $(\mathcal{F})$**	$0,5\, pt$
c) Déterminons $(\mathcal{F})$ Soit $M(z)$ $B \in (\mathcal{F}) \Leftrightarrow \lvert z - (1+i)\rvert = \sqrt{5}$ $\Leftrightarrow \lvert z_M - z_K \rvert = \sqrt{5} \quad \Leftrightarrow KM = \sqrt{5}$ Donc l'ensmble $(\mathcal{F})$ des points M est le cercle de centre K et de rayon $\sqrt{5}$	$0,5\, pt$

EXERCICE 4 **(5 points)**

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{1-x} - x + 1$

1- **On admet que :** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

- **Interprétons graphiquement ces résultats.**

la courbe $(\mathcal{C})$ admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ) - - - - - - - - - - → **$0,5\ pt$**

2- a) Calculons la limite de f en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [(x+1)e^{1-x} - x + 1]$

Posons : $X = 1 - x \iff x = -X + 1$

Quand $x \to +\infty$; $X \to -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} [(2-X)e^{X} + X] = \lim\limits_{X \to -\infty} [2e^{X} - Xe^{X} + X]$

$\begin{cases} \lim\limits_{X \to -\infty} 2e^{X} = 0 \\ \lim\limits_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0 \\ \lim\limits_{X \to -\infty} X = -\infty \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ - → **$0,5\ pt$**

b) Justifions que la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (C_f) en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} [(x+1)e^{1-x}]$

Posons : $X = 1 - x \iff x = -X +$ Quand $x \to +\infty$; $X \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x+1) = \lim\limits_{X \to -\infty} [(2-X)e^{X}] = \lim\limits_{X \to -\infty} [2e^{X} - Xe^{X}] = \mathbf{0}$

car $\lim\limits_{X \to -\infty} 2e^{X} = Xe^{X} = 0$ **Comme** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (-x+1) = 0$

donc la droite (D) d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$ **$0,5\ pt$**

3- a) Justifions que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -g(x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left((x+1)e^{1-x} - x + 1\right)' = e^{1-x} - (x+1)e^{1-x} - 1 = -(xe^{1-x} + 1)$

Or $g(x) = xe^{1-x} + 1$ d'où $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -g(x)$ - → **$0,75\ pt$**

b) Etudions le sens de variation de f

D'après la question précédente : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -g(x)$

Donc le signe de $f'(x)$ dépend de $g(x)$

Or $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]-\infty ; \alpha[\ , \ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha ; +\infty[\ , \ g(x) > 0 \end{cases}$ **donc** $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]-\infty ; \alpha[\ , \ f'(x) > 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha ; +\infty[\ , \ f'(x) < 0 \end{cases}$

On en déduit que :

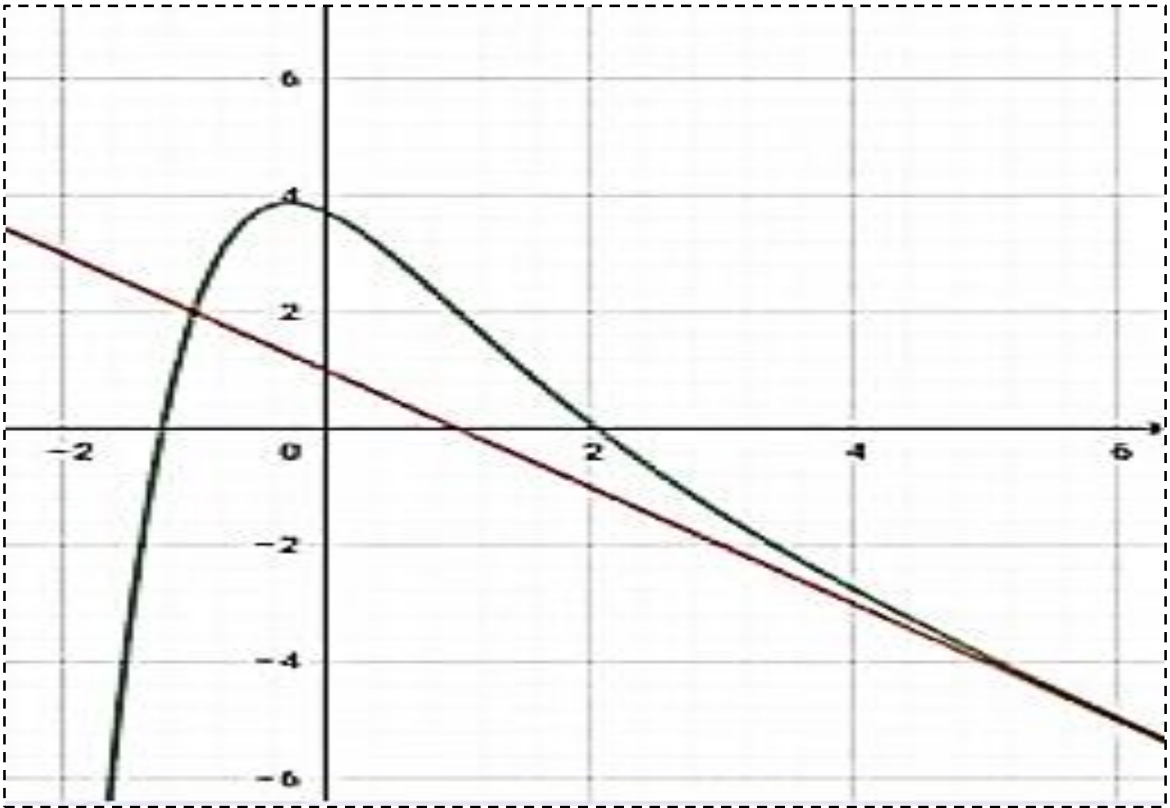
$\begin{cases} \forall\, x \in\ ]-\infty ; \alpha[, f'(x) < 0 \ donc\ f\ est\ strictement\ coissante\ sur\ ]-\infty ; \alpha[\\ \forall\, x \in\ ]-\infty ; \alpha[\ , f'(x) > 0 \ \ donc\ \ f\ est\ strictement\ décoissante\ sur\ ]\alpha ; +\infty[\end{cases}$ **$0,75\ pt$**

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+$		$-$
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	$\boxed{f(\alpha)}$	↘ $-\infty$

$1\ pt$

5- Construisons (C)



$1\ pt$

CORRIGE	EXERCICE 5 :(5 points)	BAREME
Critères	**Indicateurs**	
CM1 **Pertinence**	Pour voir si l'élève pourra bénéficier de l'aide de son père pour acheter l'ordinateur ou non, on va utiliser les suites numériques particulièrement les suites géométriques . Pour cela, je vais : ▪ déterminer le premier et le second terme ; ▪ déterminer la formule de récurrence entre deux termes consécutifs ; ▪ Calculer la somme des 12 premiers termes ; ▪ comparer la somme obtenue à $400\ 000\ F$: ▪ conclure .	$\mathbf{0,75}\ \boldsymbol{pts}$ $\boldsymbol{2ind}\ \ /\ \mathbf{6} \Rightarrow \mathbf{0,25}$ $\boldsymbol{3ind}\ \ /\ \mathbf{6} \Rightarrow \mathbf{0,5}$ $\boldsymbol{4ind}\ \ /\ \mathbf{6} \Rightarrow \mathbf{0,75}$
CM2 Utilisation correcte des outils mathématique	▪ **Déterminons le premier et le second terme** Premier terme de la suite est $u_0 = 25\ 000$ et le second terme est $u_1 = 26\ 500$ ▪ **Déterminons la formule de récurrence entre deux termes consécutifs** Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1{,}06u_n$ ▪ **Calculons la somme des 12 premiers termes** $S = u_0 + u_1 + \cdots\cdots\cdots + u_{11} = u_0 \times \frac{1-(1{,}06)^{12}}{1-1{,}06}$ $S = 421\ 749$	$\mathbf{2,5}\ \boldsymbol{pts}$ $\boldsymbol{1ind}\ \ /\ \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1,5}$ $\boldsymbol{2ind}\ \ /\ \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{2,5}$
CM3 Cohérence de la réponse	▪ Résultat attendu ; $421\ 749\ F$ ▪ Comparaison : $421\ 749\ F > 400\ 000\ F$ ▪ Conclure : l'élève pourra bénéficier de l'aide de son père pour acheter l'ordinateur	$\mathbf{1,25}\ \boldsymbol{pts}$ $\boldsymbol{1ind}\ \ /\ \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{0,75}$ $\boldsymbol{2ind}\ \ /\ \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{1,25}$
CP Critère de perfection-nement	▪ concision de la production ; ▪ Originalité de la production ; ▪ bonne présentation	$\mathbf{0,5}\ \boldsymbol{pts}$ $\boldsymbol{1ind}\ \ /\ \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{0,25}$ $\boldsymbol{2ind}\ \ /\ \mathbf{3} \Rightarrow \mathbf{0,5}$