



DEVOIR DE NIVEAU
MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (2pts)

Ecris chaque numéro sur ta feuille de copie suivi de **VRAI** si l'affirmation est vraie ou de **FAUX** si elle est fausse.

1. Soit f une fonction continue et strictement croissante sur J alors elle réalise une bijection réciproque f^{-1} qui est aussi continue et strictement décroissante sur $f(J)$.
2. Soient A et B deux évènements de probabilités non nuls. Si $P_B(A) = P(A)$ alors A et B sont dits indépendants.
3. Pour tous nombres réels a et b strictement positifs on : $\ln(ab) = \ln a \times \ln b$.
4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I , x_0 un élément de I et y_0 un nombre réel. Il existe au moins une primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0 .

EXERCICE 2 (2pts)

Pour chacune des propositions suivantes, indique le numéro suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

1. soit f une fonction continue et dérivable sur \mathbb{R} telle que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{6-3x} = \frac{3}{5}$, alors $f'(2) =$

A) $\frac{-3}{5}$	C) $\frac{-9}{5}$
B) $\frac{1}{5}$	D) $\frac{3}{5}$

2. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 + 3$.

La dérivée de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ est :

A) $f'(x) = 2x(\ln x + 1)$	C) $f'(x) = x(\ln x + 1)$
B) $f'(x) = 2x(\ln x + 3)$	D) $f'(x) = 2x(\ln x + x^2)$

3. Soient A et F deux évènements de probabilités non nuls. On donne $P(A \cap F) = 0,5$ et $P(\bar{A} \cap F) = 0,2$, alors on a :

A) $P(\bar{F}) = 0,7$	C) $P(\bar{F}) = 0,3$
B) $P(\bar{F}) = 0,5$	D) $P(\bar{F}) = 0,2$

4. Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}(\ln(2x))^2$. La primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ est :

A) $F(x) = \frac{1}{3}(\ln(2x))^3$	C) $F(x) = \frac{1}{3}(\ln(2x))^2$
B) $F(x) = \frac{1}{6}(\ln(2x))^3$	D) $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(2x))^2$

Exercice 3 (3pts)

On considère le jeu suivant : Le joueur place une mise m sur la table ($m > 0$) puis tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Si la carte est :

- Un as, le joueur récupère sa mise et gagne 1500Fr.
- Un roi, le joueur gagne 2 fois sa mise et ne récupère pas sa mise.
- Une dame, le joueur récupère sa mise.
- Un valet, le joueur récupère sa mise.
- Le joueur perd sa mise et ne gagne rien dans les autres cas.
- NB : Il y a 1 as ; 4 rois ; 4 dames et 4 valets

On considère que chaque carte a la même probabilité d'être tirée et on note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur (en fonction de m).

1. Détermine les valeurs prises par X .
2. Détermine la loi de probabilité de X .
3. Calcule $E(X)$ en fonction de m .
4. Pour quelles valeurs de m , le jeu est équitable ?

Exercice 4 (3pts)

Le but de cet exercice est de déterminer une primitive F sur $]-\infty ; 1[$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \text{ On pose } g(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2}, h(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ et}$$

$$k(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

- 1.a) Démontrer que $\forall x \in]-\infty ; 1[, g(x) = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$.
 b) En déduire une expression de $G(x)$ où G est une primitive de g sur $]-\infty ; 1[$.
- 2.a) Calcule $k'(x)$ et vérifie que $k'(x) = h(x)$.
 b) En déduire une primitive H de h sur $]-\infty ; 1[$.
3. Déduire des questions précédentes l'expression de $F(x)$.
 (On remarquera que $f(x) = g(x) + h(x)$)

Exercice 5 (5pts)

Soit la fonction g définie sur $]-\infty ; 1[$ par $g(x) = x^2 - 2x + \ln(1 - x)$.

On admet que : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; 0[, g(x) > 0 \\ \forall x \in]0 ; 1[, g(x) < 0 \end{cases}$ avec $g(0) = 0$

On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; 1[$ par $f(x) = x + 1 + \frac{\ln(1-x)}{1-x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ d'unité graphique 2cm.

1. Calcule la limite de f à gauche en 1 puis interpréter le résultat.
2. Justifie que la limite de f en $-\infty$ égale à $-\infty$.
3. a- Démontre que la droite (D) d'équation : $y = x + 1$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.
 b- Etudie la position relative de (C) par rapport à (D) .
4. On admet que f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a) Démontrer que $\forall x \in]-\infty ; 1[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}$.
 - b) Etudie les variations de f puis dresser son tableau de variation.
5. On désigne par h la restriction de f sur $]-\infty ; 0[$.
 - a) Démontre que h est une bijection de $]-\infty ; 0[$ vers un intervalle K que l'on précisera.

b) Donne le sens de variation de h^{-1} la bijection réciproque de h puis dresser son tableau de variation.

On désigne par (\mathcal{C}') la représentation graphique de h^{-1} dans le repère $(O ; I ; J)$.

6. Construis (D) , (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}') .

Exercice 6 (5pts)

Une entreprise fabrique et vend des téléphones portables. Sa capacité journalière de production est comprise entre 0 et 18 portables. On suppose que toute la production est vendue. Le coût de production en milliers de francs de x téléphones est donné par :

$$C(x) = x^3 - 25x^2 + 280x + 400.$$

La recette de la vente de x téléphones portables est $R(x) = 480x - 20x^2$. L'entreprise veut réaliser un bénéfice maximal.

En tant que stagiaire dans cette entreprise, le directeur te demande de déterminer le nombre de téléphone portables à produire par jour pour que le bénéfice soit maximal.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, propose une solution au Directeur.