MATHEMATIQUES
Série D

DEVOIR DE NIVEAU Terminale Date : Vendredi 02 Février 2024	Durée : 4 heures	Coefficient : 4

La propreté de la copie pourra être appréciée dans la notation
Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/4, 2/4 et 3/4 et une feuille annexe numérotée 4/4.
Tout modèle de calculatrice scientifique est autorisé.

EXERCICE 1 (2 points)

Dans cet exercice aucune justification n'est demandée.
Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de V si l'affirmation est VRAIE ou de F si l'affirmation est FAUSSE.

N°	Affirmations
1	Pour tout nombre réel t non nul, on a : $\ln(t^2) = 2\ln t$
2	(D) est une droite d'équation $y = ax + b$; $(a \neq 0)$ et h est une fonction rationnelle. Si $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x) - (ax + b)] = 0$, alors la droite (D) est asymptote oblique à la courbe représentative de h en $-\infty$.
3	Pour tout nombre réel x strictement positif, $\ln x < 0$.
4	La dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln(2x)$ est la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$
5	Toute suite croissante converge vers $+\infty$

EXERCICE 2 (2 points)

Dans cet exercice aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des énoncés du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées. Une seule de ces réponses est juste. Ecris sur ta feuille de copie, le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Enoncés	A	B	C
1	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(x\ln x)$ est égale à :	$-\infty$	0	$+\infty$
2	$\forall\, x \in\,]0\,;\, +\infty[$, $\log x$ est égal à :	$\frac{10}{\ln x}$	$\frac{\ln x}{\ln 10}$	$\frac{\ln x}{10}$
3	a est nombre réel tel que $a \neq 1$. La somme définie par $S = a^2 + a^3 + \cdots + a^n$ est égale à:	$S = \frac{a^n - a^2}{1 - a}$	$S = \frac{a^2(1 - a^{n-2})}{1 - a}$	$S = \frac{a^2(1 - a^{n-1})}{1 - a}$
4	Soit f la fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. On a : $f'(x)$ est égale à :	$\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$	$\frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$	$\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$
5	Dans $]0\,;\, +\infty[$, l'équation : $(\ln x)^2 + (-3 + \ln 2)\ln x - 3\ln 2 = 0$ a pour ensemble de solutions :	$\left\{3; \frac{1}{2}\right\}$	$\{1; e^3\}$	$\left\{\frac{1}{2}; e^3\right\}$

EXERCICE 3 (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \end{cases}$

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J). La courbe (C) et la droite (Δ) d'équation $y = x$ sont tracées sur la feuille annexe à rendre avec la copie.

1- a) Représente sur l'axe (OI) les termes u_0, u_1 et u_2 de la suite (u_n) en utilisant la courbe (C) et la droite (Δ) . (*On laissera les traits de construction en pointillés sur le dessin*)
   b) Quelles conjectures peut-on faire quant à la variation et à la convergence de la suite (u_n).

2- On admet que f est continue et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
   a) En utilisant un raisonnement par récurrence, démontre que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.
   b) Sachant que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$, démontre que la suite (u_n) est décroissante.
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3- Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE 4 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \frac{x\ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 5 cm.

Soit la fonction g définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$.
On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,2 ; 0,3[$ et que
$\begin{cases} \forall x \in]0; \alpha[, g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

1- Détermine $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement les résultats.

2- a) Justifie que f est continue en 0.
   b) Etudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement le résultat.

3- On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$
   a) Démontre que $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$
   b) Justifie que : $\forall x \in]0; \alpha[$ f est strictement décroissante et $\forall x \in]\alpha; +\infty[$ f est strictement croissante.
   c) Justifie que $f(\alpha) = -\alpha$

4- Dresse le tableau de variation f sur $]0; +\infty[$.

5- Construis la courbe (C_f) dans le repère (O, I, J). On prendra $\alpha = 0,3$.

EXERCICE 5 (4 points)

Une école de formation organise un test de recrutement à l'intention des élèves de niveau terminale.
Parmi les candidats à ce test, 40% sont des bacheliers.
Les résultats du test ont révélé que 75% des bacheliers sont admis et 52% des non bacheliers sont admis.

Partie A
On choisit au hasard un candidat. On note
B l'événement « le candidat est bachelier »
T l'événement « le candidat est admis au test »
S l'événement « le candidat est un bachelier qui est admis au test »

1- a) Détermine les probabilités suivantes : $P(B)$, $P_B(T)$ et $P_{\bar{B}}(T)$.
   b) Construis l'arbre pondéré de probabilités correspondant à cette situation.
   c) Justifie que $P(S) = \frac{3}{10}$ et en déduire que $P(T) = \frac{153}{250}$
2- Calcule la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier.

Partie B
On choisit au hasard cinq candidats.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de candidats bacheliers qui sont admis au test.

1- Justifie que X suit une loi binomiale et précise les paramètres de cette loi
2- Calcule $P(\mathrm{X} = 3)$. On donnera une l'arrondi d'ordre 4 du résultat.
3- Calcule l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 6 (5 points)

En visite dans une petite et moyenne entreprise (PME) de fabrication et de commercialisation de sachets de poudre de cacao, des élèves d'une classe de Terminale reçoivent les informations suivantes :

« Pour des raisons matérielles, la capacité journalière de production de la PME est comprise entre 1.000 et 5.000 sachets. Toute la production journalière est commercialisée. Une étude a révélé que la variation du bénéfice journalier B, exprimé en millions de francs CFA, réalisé pour la production et la vente de x milliers de sachets est modélisé sur l'intervalle [1 ; 5] par la fonction h définie par : $\mathrm{h}(x) = 9 - x^2$ ».

Le Directeur de l'usine souhaite déterminer le bénéfice maximal que la PME peut enregistrer sachant qu'elle ne fait pas de bénéfice et ne perd pas pour 5.000 sachets produits et vendus. N'ayant pas de personnel qualifié, il te demande de l'aide en tant qu'élève en classe de Tle D.

A l'aide d'une production argumenté basée sur tes connaissances mathématiques au programme, apporte ton aide au directeur.

Feuille annexe (à rendre avec la copie)

Nom et prénoms: ………………………………………………………………………..……………

Classe: TD……