CEFOP-ASA	DEVOIR DU 1er SEMESTRE	Année Scolaire 2023- 2024
M. DJAHOU Franck Tél :92 10 86 37/99 43 40 11	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	Durée : 4H ; Coef : 3 Classe : Tle D

EXERCICE 1 : (3,75pts)

Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et i dans le plan complexe. Pour tout nombre complexe z différent de 1, on donne

$Z = \frac{(1-i)(z-i)}{z-1}$. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ où x ; y ; X ; Y sont des réels.

1. Calculer X et Y en fonction de x et y.
2. Déterminer les ensembles des points M :
a) Tels que Z soit réel
b) Tels que R_e(Z) = X soit négatif ou nul.
c) Tels que Z soit un imaginaire pur
3. a) Démontrer que le nombre complexe Z est un réel non nul si, et seulement si, il existe un entier k tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + \text{K}\pi$.

   b) En déduire l'ensemble des points du plan M :

- Tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}(\pi)$.
- Tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4}(2\pi)$.

EXERCICE 2 : (3,5pts)

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$

1.) Calcule $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3}$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z^2 + 3)\,Q(z)$.

2.) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3.) Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3};$ $z_B = -i\sqrt{3}$ $z_C = 3 + 2i\sqrt{3};$ et $z_D = \overline{z_C}$; puis montrer que ces quatre pointe appartiennent à un même cercle.

4) On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC

EXERCICE 3 : (5pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, I, J)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on note f l'application, qui à tout nombre complexe z différent de $-2i$, associe :Z $= \frac{z-2+i}{z+2i}$

1/On pose $z = x + iy$, $ou\ x\ et\ y\ sont\ de\ sont\ des\ nombres\ réels,$

a) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z en fonction de x et y
b) Déterminer l'ensemble (d) des points M d'affixe z du plan tel que z soit réel.
c) Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z de plan tel que z soit un imaginaire pur.

2/On note A et B les points d'affixes respectives :$z_A = 2 - i\ et\ z_B = -2i,$. En remarquant que $Z = \frac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles (D) et (E) par une méthode graphique.

3/ Quel est l'ensemble (F) des points M d'affixe z tel que : arg.(z) = $\frac{\pi}{2}$ +2kπ, $(k \in ZI)$

4/Déterminer l'ensemble (G) des points M du plan d'affixe z tels que: $|z| = 1$

5a/ Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2i|$

b) En déduire que, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon 5, le point M'd'affixe z décrit un cercle dont on précisera le rayon et l'affixe de centre.

<u>EXERCICE 4 :</u> (7,75pts)

I- Soit la fonction f définie par : $f(x) = x + 1 + \sqrt{|4x^2 - 9|}$

On considère par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O,$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$)

1) Déterminer l'ensemble de finition de f puis écrire f sans symbole de valeur absolue
2) Etudier la dérivabilité de f au point $x = \frac{3}{2}$ et $x = \frac{-3}{2}$
3) Résoudre chacune des inéquations suivantes

a) $\forall x \in [0; \frac{3}{2}[$; $\sqrt{9 - 4x^2} - 4x > 0$

b) $\forall x \in]-\infty; -\frac{3}{2}$ [; $\sqrt{4x^2 - 9} + 4x > 0$

4) Etudier le sens de variation de f
5) a- Calculer les lim au borne de son ensemble de définition puis dresser son tableau de variation

   b- Montrer que (C) admet deux (2) asymptote oblique dont on précisera les équations
6) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec les axes du repère
7) Construire (C) et ses asymptotes

II- soit g la restriction de f sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$

1)Montre que g est bijective sur cet intervalle vers un intervalle J que l'on précisera

2)a-Monte que la réciproque $g^{-1}\ de\ g$ est dérivable sur $x = 3 + \sqrt{7}$

b-déterminer l'ensemble de définition Dg^{-1} de g^{-1}

3) Déterminer le tableau de variation de g^{-1} puis construire (c') dans le repère précédant

<u>Bonus</u> : Enoncer le théorème des inégalités des accroissements finie **(0,75pt)**

***« Au commencement la mathématiques existait et à nos jours, sans mathématiques le monde ne peut jamais évoluer »* D. Franck**