BAREME : DEVOIR N°1 06/10/25

Exercice 1 2/2

1 - Faux 0,5 2 - Faux 0,5 3 - Vrai 0,5 4 - Faux 0,5

Exercice 2 4/4

1) * $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5x+3}{x^2-2x+9} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ → 0,5 pt

* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -5$ donc par composée de limite, $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\dfrac{x^2+5x+3}{x^2-2x+9}\right) = -5$ → 1 pt

2) * $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2} + x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x^2+2} - x}$

$= 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2} - x = +\infty \end{cases}$

donc par quotient de limite,
$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2} + x = 0$ → 0,5 pt

* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 12$ → 1,5 pt

d'où par composée de limite,
$\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(\sqrt{x^2+2} + x\right) = 12$ → 0,5 pt

3) * $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x)}{\pi - x} = \lim\limits_{x \to \pi} \frac{-\sin(x)}{x - \pi}$

2/11

Posons $g(x) = -\sin(x)$

$$\lim\limits_{x \to \pi} \frac{-\sin(x)}{x-\pi} = \lim\limits_{x \to \pi} \frac{g(x) - g(\pi)}{x - \pi} = g'(\pi)$$

$g'(x) = -\cos(x) \Leftrightarrow g'(\pi) = 1$

donc par taux de variation,

$\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x)}{\pi - x} = 1$ - - - - - → 0,5 pt

* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -5$ d'où par composée

de limite, $\lim\limits_{x \to \pi} f\left(\frac{\sin(x)}{\pi - x}\right) = -5$ - - → 0,5 pt

Exercice 3 3/3

1)
• $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\sqrt{1+\sin(x)} - 1}{x}$

$$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\sin(x)}{x\left(\sqrt{1+\sin(x)}+1\right)} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\sin x}+1\right)}\right]$$

$= \frac{1}{2}$ car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}+1} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ⇒ 0,5

3/11 donc par produit de limite,

$$\lim_{x \to 0^<} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$* \lim_{x \to 0^>} f(x) = \lim_{x \to 0^>} \sqrt{1+x} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \to 0^>} \sqrt{1+x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^>} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

par somme de limite, $\lim_{x \to 0^>} f(x) = \frac{1}{2}$ ——→ 0,5 pt

On a : $\lim_{x \to 0^>} f(x) = \lim_{x \to 0^<} f(x) = \frac{1}{2}$ donc ——→ 0,5 pt

f est continue en 0

$$2) * \lim_{x \to 0^>} f(x) = \lim_{x \to 0^>} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0^>} \frac{\sin(x)\left(\sqrt{x+1} + 1\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^>} \frac{\sin(x)}{x} \times \left(\sqrt{x+1} + 1\right) = 2$$

$$\text{car } \begin{cases} \lim_{x \to 0^>} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^>} \left(\sqrt{x+1} + 1\right) = 2 \end{cases}$$

4/11 Par produit de limite, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 2$ ⟶ 0,5 pt

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \dfrac{x^2}{1-\cos(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{x^2(1+\cos(x))}{1-\cos^2(x)}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{x^2(1+\cos(x))}{\sin^2(x)}$

* $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}$

$= \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\dfrac{\sin^2(x)}{x^2} \times \dfrac{1}{(1+\cos(x))} \right] = \dfrac{1}{2}$

car $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{1+\cos(x)} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

donc par inverse de limite, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 2$ ⟶ 0,5 pt

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = f(0) = 2$

donc f est continue en 0. ⟶ 0,5 pt

⑤/11

Exercice 4

A/

1-a) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 3x + 8)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ---→ 0,5 pt

* De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ --→

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ ---→ 0,5 pt

1-b) * Dérivée de g

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2 + 3$ ---→ 0,5 pt

* signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 3 > 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) > 0$

* Variation de g

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$ donc g est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ---→ 0,25 pt

6/11 * Tableau de Variation

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

0,25 pt

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, g est continue et strictement croissante de plus $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ par conséquent, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ → 0,5 pt

Aussi $g(-2) = -6$ et $g(-1) = 4$

On a $g(-2) \times g(-1) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermediaires

$-2 < \alpha < -1$ → 0,5 pt

3) • $\forall x \in]-\infty ; \alpha[\Rightarrow x < \alpha$ Comme g est strictement croissante sur $]-\infty ; \alpha[$ alors $g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ ainsi $g(x) < 0$ → 0,25 pt

• $\forall x \in]\alpha ; +\infty[\Rightarrow x < \alpha$ Comme f est strictement croissante sur $]\alpha ; +\infty[$ alors $g(x) > g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ ainsi donc $g(x) > 0$. ——————→ 0,25 pt

D'où $\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \alpha[, \ g(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha ; +\infty[, \ g(x) > 0 \end{cases}$

B/

1-a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3-4)}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 8x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4 + 3x^2 + 8x}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{x(x^3+3x+8)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x\,g(x)}{(x^2+1)^2}$ ——————→ 0,5 pt

1-b) * Signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2+1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ depend de $x\,g(x)$. ——————→ 0,5

• Tableau de signe

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x\,g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\forall x \in]-\infty; \alpha[$, $f'(x) > 0$
$\forall x \in]\alpha; 0[$, $f'(x) < 0$ - - - → 0,25
$\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

* Les variations de f

- $\forall x \in]-\infty; \alpha[$ et $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ par suite f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; \alpha[$ et sur $]0; +\infty[$. → 0,25
- $\forall x \in]\alpha; 0[$, $f'(x) < 0$ d'où f est continue et strictement décroissante sur $]\alpha; 0[$. - - → 0,25

* Tableau de variation

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

→ 0,25

9/2) $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^3 - 4}{\alpha^2 + 1}$

On sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + 3\alpha + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 = -3\alpha - 8 \quad (i)$$

$$\Leftrightarrow \alpha\alpha^2 = -3\alpha - 8$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{-3\alpha - 8}{\alpha} \quad (ii)$$

Remplaçons (i) et (ii) dans $f(\alpha)$.

On a : $f(\alpha) = \dfrac{-3\alpha - 8 - 4}{\dfrac{-3\alpha - 8}{\alpha} + 1}$

$$= \frac{-3\alpha - 12}{\dfrac{-3\alpha - 8 + \alpha}{\alpha}} = \frac{-3\alpha - 12}{\dfrac{-2\alpha - 8}{\alpha}}$$

$$= \frac{-3(\alpha + 4)}{\dfrac{-2(\alpha + 4)}{\alpha}} = \frac{-3}{\dfrac{-2}{\alpha}} = \frac{3}{2}\alpha \longrightarrow 0,5$$

10/11

Exercice 5

– Limite et continuité

Je vais :

CM1

- poser $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x - 1$
- Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$
- Dresser son tableau de variation
- Trouver le nombre de solution à travers le tableau de variation puis conclure.

$\frac{1}{5} \to 0,5$

$\frac{3}{5} \to 0,75$

$\frac{4}{5} \to 1$

---

* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3$

CM2

- $\forall x \in]-\infty; -1[$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$
- $\forall x \in]-1; 1[$, $f'(x) < 0$

* Les variations

> $\forall x \in]-\infty; -1[$ et $\forall x \in]1; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$.

> $\forall x \in]-1; 1[$, $f'(x) < 0$ d'où f est continue et strictement décroissante sur $]-1; 1[$.

$\frac{4}{4} \to 0,5$

$\frac{2}{4} \to 1,5$

$\frac{3}{4} \to 2,5$

(11)/11

* Tableau de Variation

x	$-\infty$		α_1		-1		α_2		1		α_3		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	0	−		−	0	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

▷ $\forall x \in]-\infty; -1[$, f est continue et strictement croissante de plus $f(]-\infty;-1[) =]-\infty; 1[$ or $0 \in]-\infty; 1[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α_1 sur $]-\infty; -1[$.

▷ $\forall x \in]-1; 1[$, f est continue et strictement décroissante de plus, $f(]-1; 1[) =]-3; 1[$, or $0 \in]-3; 1[$ d'où l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α_2 sur $]-1; 1[$.

▷ $\forall x \in]1; +\infty[$, f est continue et strictement croissante de plus, $f(]1; +\infty[) =]-3; +\infty[$ or $0 \in]-3; +\infty[$ ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α_3 sur $]1; +\infty[$

Conclusion

CM3

$\forall x \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions

1pt

c'est Konan qui a la bonne affirmation.

CP

0,5