Corrigé

Exercice 1

1. Résolution de (1) : $z^2-10z+50=0$.

Calcul du discriminant : $\Delta=b^2-4ac=100-4\times1\times50=100-200=-100<0$ et $\Delta=100i^2$ donc $\sqrt{\Delta}=10i$

l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{10-10i}{2}=5-5i$ De même : $z_2=\overline{z}_1=5+5i$

Ensemble des solutions : $S=\{5-5i;5+5i\}$.

Résolution de (2) : $z+2=i\sqrt{3}\,z-6$

$$z+2=i\sqrt{3}\,z-6\Leftrightarrow(1-i\sqrt{3})z=-6-2\Leftrightarrow(1-i\sqrt{3})z=-8\Leftrightarrow z=\frac{-8}{1-i\sqrt{3}}\Leftrightarrow z=\frac{-8\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}\Leftrightarrow z=\frac{-8+8i\sqrt{3}}{1+3}$$

$\Leftrightarrow z=-2+2\sqrt{3}i$

2. Module et argument de $z_A=5-5i$; z_A s'écrit sous la forme $z_A=a+bi$, donc on a :

$|z_A|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+(-5)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Soit θ_A un argument de z_A ; θ_A est tel que $\begin{cases}\cos\theta_A=\dfrac{a}{|z_A|}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_A=\dfrac{b}{|z_A|}=-\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$: donc $\theta_A=-\dfrac{\pi}{4}$

La forme exponentielle est donc : $z_A=5\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

2.b Forme exponentielle de z_B. Soit θ_B un argument de $z_B=\overline{z}_A$, donc $|z_B|=|\overline{z}_A|=|z_A|=5\sqrt{2}$.

donc $\arg z_B=\arg\overline{z}_A=-\arg z_A=-(-\pi/4)=\pi/4+2k\pi$ et $z_B=5\sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

$\dfrac{z_B}{z_A}=\dfrac{5\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{5\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}=e^{i\pi/4+i\pi/4}=e^{i\pi/2}=i$. On a donc : $z_B=iz_A=z_Ae^{i\pi/2}$. Donc B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. De plus, on a OA = OB, donc le triangle OAB est rectangle isocèle en O de centre O et d'angle $\pi/2$.

3. . Soit C le point d'affixe $z_C=-2-2i\sqrt{3}$. l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$ est le point D, d'affixe $z_D=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)\times e^{-i\pi/2}=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)\times(-i)=+2i+2i^2\sqrt{3}=-2\sqrt{3}+2i$

donc $z_D=-2\sqrt{3}+2i$. $OC=|z_C|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$.

De même $OD=|z_D|=|iz_C|=|i|\times|z_C|=|z_C|=4$.

Donc les points C et D sont sur le cercle de centre O et de rayon 4, puis on utilise une de leurs coordonnées qui est entière pour les placer avec précision.

4. Affixe du point K, milieu de [AC] : $z_K=\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{5-5i-2-2i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\left(5+2\sqrt{3}\right)i}{2}$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{OK}$: $z_{\overrightarrow{OK}}=z_K-0=\dfrac{3-\left(5+2\sqrt{3}\right)i}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\left(5+2\sqrt{3}\right)}{2}i$

Donc le vecteur $\overrightarrow{OK}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{OK}\left(\frac{3}{2};-\frac{\left(5+2\sqrt{3}\right)}{2}\right)$

Affixe du vecteur $\overrightarrow{DB}$: $z_{\overrightarrow{DB}}=z_B-z_D=5+5i-(-2\sqrt{3}+2i)=5+2\sqrt{3}+3i$

Donc le vecteur $\overrightarrow{DB}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{DB}\left(5+2\sqrt{3};3\right)$

Calcul du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{DB}$: $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{DB}=\frac{3}{2}\times\left(5+2\sqrt{3}\right)-3\times\frac{5+2\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{2}+3\sqrt{3}-\frac{15}{2}-3\sqrt{3}=0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{DB}$ sont orthogonaux donc les droites (DB) et (OK) sont perpendiculaires.

EXERCICE 2

1. Tableau récapitulatif :

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S	8 : $(X=-8)$	$8(X=+12,5)$	16
Sans le défaut S	$4(X=5)$	$180(X=50)$	184
Total	12	188	200

2. (a) • Si l'objet n'a aucun défaut, le prix de vente est de 250 € et le coût de fabrication 200 € . Donc, le bénéfice est de $X = 250 - 200 = 50$ €.

• Si l'objet présente le seul défaut S, le prix de vente est de $250 \times 0,85 = 212,50$ € et le coût de fabrication 200 €. Donc, le bénéfice est de $X = 212,5 - 200 = 12,5$ € .

• Si l'objet présente le seul défaut F, le prix de vente est de 250 € et le coût de fabrication $200 + 45 = 245$ € . Donc, le bénéfice est de $X = 250 - 245 = 5$ € .

• Si l'objet présente les deux défauts S et F, le prix de vente est de 250 € et le coût de fabrication $200 + 58 = 258$ € . Donc, le bénéfice est de $X = 250 - 258 = -8$ € .

Conclusion : X prend les valeurs 50 ; 12, 5 ; 5 et −8

(b) $p\left(S\cap\overline{F}\right)=p(S\text{ et non }F)=\frac{8}{200}=0,04$ d'où $p\left(S\setminus F\right)=0,04$

(c) Loi de probabilité de X :

x_i	50	12,5	5	−8
$p(X=x_i)$	$\frac{180}{200}=0,9$	$\frac{8}{200}=0,04$	$\frac{4}{200}=0,02$	$\frac{8}{200}=0,04$

(d) $E(X) = 50 \times 0,90 + 12,5 \times 0,04 + 5 \times 0,02 - 8 \times 0,04 = 45,28$.

$E(X) = 45,28$ €, ce qui représente le bénéfice moyen de l'entreprise par objet vendu.

Problème -corrigé

A.1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

$f(1)=1$; $f'(1)=1$ puisque le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1est égal à 1

$f'(2)=0$, puisque la tangente au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses

2. $f(x)=a\ln x+bx+\frac{c}{x}$; $f'(x)=\frac{a}{x}+b-\frac{c}{x^2}$.

3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels a, b et c

$f(1)=a\ln 1+b\times 1+\frac{c}{1}=b+c$; $f'(1)=\frac{a}{1}+b-\frac{c}{1^2}=a+b-c$. $f'(2)=\frac{a}{2}+b-\frac{c}{2^2}=\frac{a}{2}+b-\frac{c}{4}=\frac{2a+4b-c}{4}$.

4. $f(1)=1\Leftrightarrow b+c=1$; $f'(1)=1\Leftrightarrow a+b-c=1$ $f'(2)=0\Leftrightarrow\frac{2a+4b-c}{4}=0\Leftrightarrow 2a+4b-c=0$ et on obtient

le système $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases}$. $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=2 \quad \times 2 \\ 2a+5b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=2-2b=2-2(-3)=2+6=8 \\ c=1-b=1-(-3)=1+3=4 \end{cases}$.

5. $f(x)=8\ln x-3x+\dfrac{4}{x}$

B. 1. $f(x)=x\left(8\dfrac{\ln x}{x}-3+\dfrac{4}{x^2}\right)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8\dfrac{\ln x}{x}-3+\dfrac{4}{x^2}\right)=-3$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-3x^2=0$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(8x\ln x-3x^2+4\right)=4$. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$.

3. a. $f'(x)=\dfrac{8}{x}-3-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{8x-3x^2-4}{x^2}$, or $(3x-2)(2-x)=6x-3x^2-4+2x=-3x^2+8x-4$,donc $f'(x)=\dfrac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$

x	0		$2/3$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+\infty$ ↘	$0{,}76$	↗	$1{,}54$	↘	$-\infty$

b. La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$, elle est aussi strictement décroissante sur l'intervalle $[4;5]\subset[2;+\infty[$, or $f(4)\approx0{,}09$ et $f(5)\approx-1{,}324$ de plus $0\in[f(4);f(5)]$, donc d'après le théorème de valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $f(\alpha)=0$ et $\alpha\in[4;5]$.

c. à l'aide de la calculatrice on a : $f(4{,}07)=0{,}0019$ et $f(4{,}08)\approx-0{,}01$, donc $4{,}07<\alpha<4{,}08$.

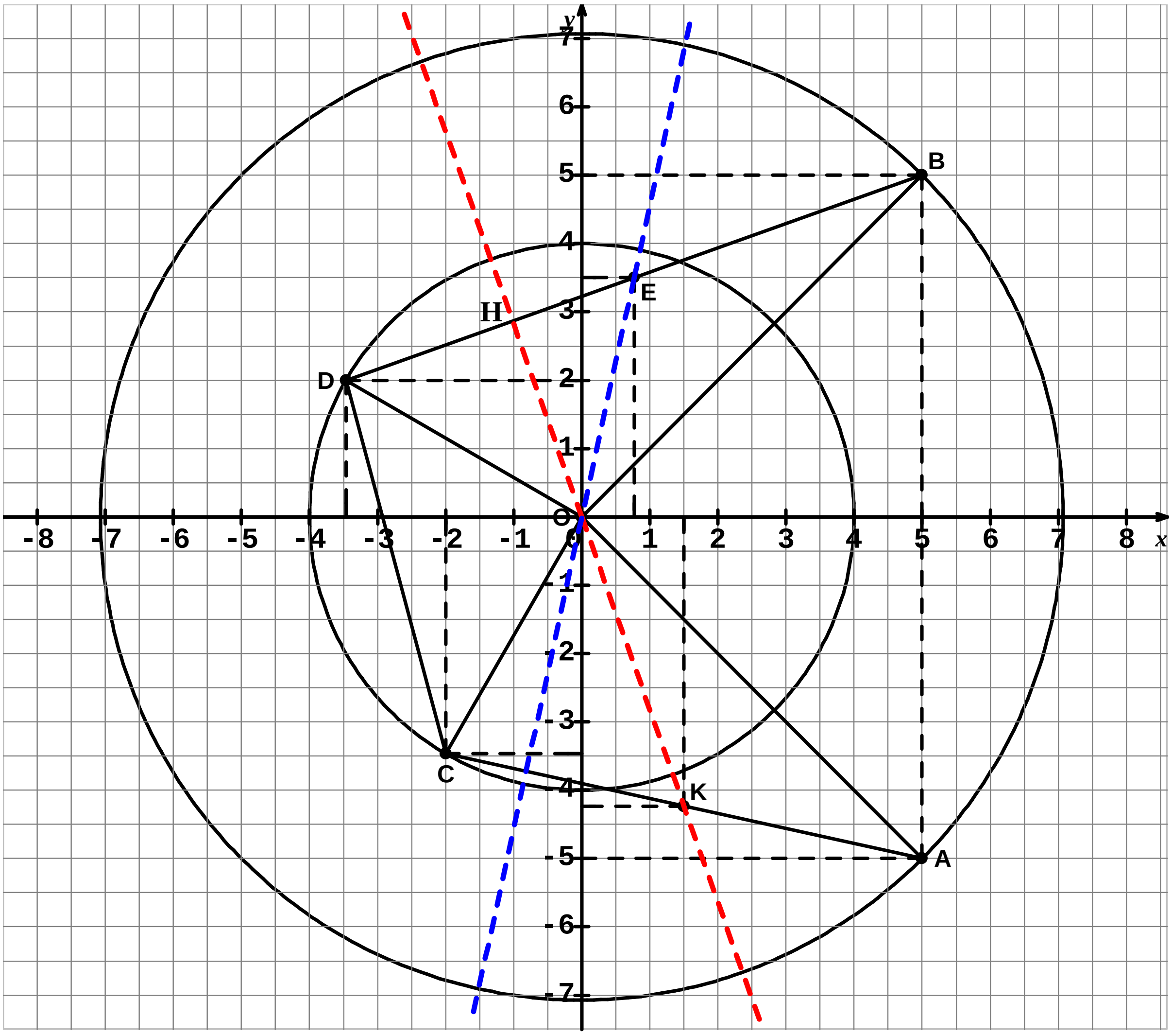
C.1. $F(x)=(8x+4)\ln x-8x-\dfrac{3}{2}x^2$:

$F'(x)=8\ln x+\dfrac{(8x+4)}{x}-8-3x=8\ln x+8+\dfrac{4}{x}-8-3x=8\ln x-3x+\dfrac{4}{x}=f(x)$,par conséquent $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2. $A=\left(\displaystyle\int_1^3 f(x)dx\right)u.a=4\times\left[F(x)\right]_1^3=4\left[F(3)-F(1)\right]$

$F(3)=(8\times3+4)\ln3-8\times3-\dfrac{3}{2}\times9=28\ln3-\dfrac{75}{2}$ et $F(3)=(8\times1+4)\ln1-8-\dfrac{3}{2}=0-\dfrac{19}{2}$

$A=4\left[28\ln3-\dfrac{75}{2}+\dfrac{19}{2}\right]=4\left[28\ln3-\dfrac{56}{2}\right]=4\left(28\ln3-28\right)cm^2\approx11{,}05cm^2$


y
x
B
A
C
D
E
H
K
O
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7

.