Exercice 1 5 points

On note i le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$,unité 1 cm).

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes (les solutions seront données sous forme algébrique) : (1) : $z^2 - 10z + 50 = 0$ (2) : $z + 3 = i\sqrt{3}\,z - 6$.

2. a. Soit A le point d'affixe $z_A = 5 - 5i$.

Déterminer le module, un argument et la notation exponentielle de z_A.

b. Soit B le point d'affixe z_B , z_B étant le nombre complexe conjugué de z_A.

Déterminer la notation exponentielle de z_B, puis celle de $\dfrac{z_B}{z_A}$.

En déduire que B est l'image de A par une rotation de centre O dont on précisera l'angle.

Construire le triangle OAB dans le repère donné et indiquer sa nature.

3. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 - 2i\sqrt{3}$.

Montrer que l'image de C par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$ est le point D, d'affixe $z_D = -2\sqrt{3} + 2i$.

Calculer la distance OC et construire avec précision le triangle OCD.

4. Soit K le milieu de [AC].

Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OK}$ et $\overrightarrow{DB}$ puis montrer que les droites (DB)et (OK) sont perpendiculaires. (on pourra utiliser le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}}$)

Exercice 2 : 4 points

Une entreprise produit des objets qu'elle destine à la vente. Ces objets peuvent présenter deux types de défauts :

- le défaut S de nature esthétique ;
- le défaut F de fonctionnement.

Un objet est déclaré parfait s'il ne présente aucun des deux défauts.

On prélève un lot de 200 objets sur la production et on constate que :

- le défaut S est observé sur 16 objets ;
- le défaut F est observé sur 12 objets ;
- 180 objets sont déclarés parfaits.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

	Avec le défaut F	Sans le défaut F	Total
Avec le défaut S			16
Sans le défaut S			
Total			200

On admet que la répartition des deux types de défauts, observée dans le lot de 200 objets prélevés, reflète celle de l'ensemble de la production. On admet également que tout objet produit est vendu.

On sait en outre que le coût de fabrication d'un objet est de 200 €.

2. Dans cette question, le prix de vente de l'objet est fixé à 250 €.
Si l'objet présente le seul défaut S, l'entreprise accorde au client une réduction de 15 % du prix. Si l'objet présente le seul défaut F, l'entreprise réalise les réparations à ses frais pour un coût de 45 €.
Si l'objet présente les deux défauts, l'entreprise réalise les réparations à ses frais pour un coût de 58 €.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard dans la production, associe le bénéfice algébrique, en euros, réalisé par l'entreprise à la vente de cet objet.

(a) Justifier le fait que X prend les valeurs (exprimées en euros) : 50 ; 12, 50 ; 5 et −8.

(b) Démontrer que la probabilité pour qu'un objet présente le seul défaut S est 0, 04.

(c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X (On pourra représenter les résultats dans un tableau.)

(d) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X . Que représente $E(X)$ pour l'entreprise ?

PROBLÈME : 11 points

La fonction *f* est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = a\ln x + bx + \dfrac{c}{x}$ où *a*, *b* et *c* sont trois nombres réels à déterminer. On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* .
On a représenté la fonction *f* sur la feuille annexe dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm. On note C la courbe représentative de cette fonction *f* .
On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 1. La tangente T passe par l'origine O du repère.
La tangente à la courbe C au point d'abscisse 2 est parallèle à l'axe des abscisses.

PARTIE A :Recherche de l'expression de $f(x)$

1. Préciser (sans justifier) les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

2. Déterminer $f'(x)$, en fonction de la variable *x* et des nombres réels *a*, *b* et *c*.

3. Exprimer $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$ en fonction des nombres réels *a*, *b* et *c*.

4. En utilisant les réponses aux questions 1.et 3., montrer que les nombres réels *a*, *b* et *c* sont solutions du système *S* suivant : $\begin{cases} b+c=1 \\ a+b-c=1 \\ 2a+4b-c=0 \end{cases}$

5. Résoudre le système *S*. En déduire une expression de $f(x)$.

PARTIE B : Étude de la fonction *f*

Dans la suite du problème la fonction *f* est définie sur l'intervalle]0 ; ∞[par : $f(x) = 8\ln x - 3x + \dfrac{4}{x}$

1. Déterminer par calculs la limite de *f* en $+\infty$ (on peut factoriser $f(x)$ par *x*).

2. On rappelle que : $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$. En écrivant $f(x)$ sous la forme d'une seule fraction,

déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle]0 ; ∞[: $f'(x) = \dfrac{(3x-2)(2-x)}{x^2}$

a. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f (justifier avec soin le signe de $f'(x)$.)

b. Montrer que, sur l'intervalle [4 ; 5] l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution. notée α .

c. Justifier l'encadrement de la solution α d'amplitude 10^{-2} suivant : $4,07 < \alpha < 4,08$.

Partie C : Calcul d'une aire

Soit H la fonction définie sur]0 ; +∞[par $H(x) = x \ln x - x$.

1. Calculer $H'(x)$, où H' désigne la fonction dérivée de la fonction H .
   En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0 ; +∞[.

2. On considère le domaine du plan S délimité par la droite d'équation $x = 1$, la droite d'équation $x = e$, la courbe C et l'axe des abscisses.
   Calculer, en unités d'aire puis en cm^2, la mesure de l'aire du domaine S.

Annexe – Problème