

Corrigé Exercice 1 (6 points)

1. a. On a $|z_A| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. $\begin{cases} \cos \theta_A = \frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta_A = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Un argument de z_A est donc égal à $\theta_A = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

b. $z_A = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 2e^{i\pi/3}$

c. Le point A est le point d'ordonnée positive commun au cercle unitaire et à la droite $x = 1$.

2. a. La rotation étant de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, cela signifie que :

$$z_B = z_A \times e^{i\pi/3} = 2e^{i\pi/3} \times e^{i\pi/3} = 2 \times e^{2i\pi/3}$$

b. On a donc $z_B = 2 \times e^{2i\pi/3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 + \sqrt{3}i$

c. Le point B est le symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées Oy.

3. Par définition de la rotation $OA = OB$, le triangle est isocèle et $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$. On en déduit que ses trois angles ont la même mesure : il est donc équilatéral.

4. a. Le point C est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ ($z_C = z_A e^{i\pi/4}$).

b. Cf. figure

c. $z_C = z_A e^{i\pi/4} = 2e^{i\pi/3} \times e^{i\pi/4} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{7i\pi/12} = 2 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right)$

d. $z_C = z_A e^{i\pi/4} = (1 + \sqrt{3}i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{6} + i\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}i$

e. Comme $z_C = 2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + 2i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, on en déduit par identification des parties réelles et imaginaires

que : $2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$. $2 \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Problème (14 points)

Partie A : Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - \ln x - x^2$.

1. Calculer $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction g . On a : $g'(x) = -\frac{1}{x} - 2x$.

Donc, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, on a : $g'(x) < 0$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Calcul de $g(1)$. Signe de $g(x)$.

On a : $g(1) = 1 - \ln 1 - 1 = 0$. puisque la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, on en déduit le tableau :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
$g(x)$		+	0 -

Partie B : Étude de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x} - x + 2$.

1. a) Déterminer la limite de la fonction f en 0. Interpréter graphiquement cette limite.

On peut écrire : $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x - x + 2$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc, par produit : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$.

Comme par ailleurs on a $\lim_{x \rightarrow 0} (-x + 2) = 2$, on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

La courbe C a donc une asymptote verticale d'équation $x=0$ (axe des ordonnées)

b) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f .

On sait que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2) = -\infty$. Donc, par addition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

c) Justifier que la droite D d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe C .

On a : $f(x) - (-x + 2) = \frac{\ln x}{x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x + 2)) = 0$.

Donc, la droite D d'équation $y = -x + 2$ est bien asymptote oblique à C en $+\infty$.

d) Position de la courbe C par rapport à la droite D .

Cette position est donnée par le signe de $f(x) - (-x + 2)$.

On a vu que : $f(x) - (-x + 2) = \frac{\ln x}{x}$. Or, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $\frac{\ln x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

Donc : Sur l'intervalle $]0; 1[$, la courbe C est en-dessous de la droite D ,

Sur l'intervalle $]1; +\infty[$, la courbe C est au-dessus de la droite D ,

La courbe C coupe la droite D au point d'abscisse 1.

2. a) Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 1[$, $f'(x) = x^2 g(x)$.

On a, d'après les règles de dérivation : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2}$.

Donc : $f'(x) = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Tableau de variation de f . Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$ qui a été vu à la question A.2)

On peut donc construire le tableau de variation de f :

x	0	1	+	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			1	
		$-\infty$		$-\infty$

3. a) Déterminer la point A de C où la tangente est parallèle à l' asymptote D .

Deux droites sont parallèles lorsqu' elles ont le même coefficient directeur.

La droite D a pour coefficient directeur -1 . La tangente à C au point d' abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$. Il faut donc résoudre l' équation $f'(x) = -1$.

Cette équation équivaut successivement à :

$$\frac{g(x)}{x^2} = -1 \Leftrightarrow g(x) = -x^2 \Leftrightarrow 1 - \ln x - x^2 = -x^2 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

b) Équation de la tangente T à C au point d' abscisse e .

Cette tangente est précisément celle qui est parallèle à la droite D .

Son équation est donnée par la formule : $y = f'(e)(x - e) + f(e)$. Ou encore :

$$y = -1 \times (x - e) + \frac{1}{e} - e + 2 = -x + e + \frac{1}{e} - e + 2 = -x + 2 + \frac{1}{e}. \text{ Finalement : } y = -x + 2 + \frac{1}{e}.$$

4. a) Démontrer que l' équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l' intervalle $]0;1[$.

La fonction f est dérivable et strictement croissante sur l' intervalle $]0;1[$. De plus, nous savons

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et que $f(1) = 1$. Donc, d' après le théorème des valeurs intermédiaires, l' équation

$f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l' intervalle $]0;1[$ telle que $f(\alpha) = 0$.

b) Donner un encadrement d' amplitude 0,01 de α .

À la calculatrice, on trouve : $f(0,48) \approx -0,01$ et $f(0,49) \approx 0,05$. On en déduit : $0,48 \leq \alpha \leq 0,49$.

c. La fonction f est dérivable et strictement décroissante sur l' intervalle $]1;+\infty[$. Elle est e particulier sur

l' intervalle $[2;3] \subset]1;+\infty[$ De plus, nous savons $f(2) = \frac{\ln 2}{2} > 0$ et que $f(3) = \frac{\ln 3}{3} - 1 \approx -0,6337 < 0$

Donc, d' après le théorème des valeurs intermédiaires, l' équation $f(x) = 0$ admet une solution unique

β dans l' intervalle $]0;1[$ telle que $f(\beta) = 0$.

b) Donner un encadrement d' amplitude 0,01 de β .

À la calculatrice, on trouve : $f(2,44) \approx -0,006$ et $f(2,45) \approx -0,02$. On en déduit : $2,44 \leq \beta \leq 2,45$.

5. voir courbe ci-dessous.

Partie C

1. $h(x) = (\ln x)^2$: $h'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \ln x = \frac{2 \ln x}{x}$, par conséquent une primitive de $\frac{\ln x}{x}$ est $H(x) = \frac{1}{2} \times (\ln x)^2$.

On déduit que $F(x) = \frac{1}{2} \times (\ln x)^2 - \frac{1}{2} \times x^2 + 2x + c$.

2. $A = \left(\int_1^{\sqrt{e}} (f(x) - y) dx \right) u.a = \left(\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} dx \right) u.a = 16 \times [H(x)]_1^{\sqrt{e}} = 16 (H(\sqrt{e}) - H(1)) = 16H(\sqrt{e})$

$$A = 8 (\ln \sqrt{e})^2 = 8 \left(\frac{1}{2} \times \ln e \right)^2 = 2cm^2.$$

