DEVOIR RÉGIONAL DE MATHÉMATIQUES
NIVEAU TERMINALE D

13 février 2024
14h à 18h

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
L'utilisation de la calculatrice scientifique est autorisée.

Exercice n°1 (2 points)

Ecris le numéro de l'affirmation suivi de Vrai (V) si elle est vraie ou Faux (F) si elle est fausse.

1	Deux évènements A et B d'un univers Ω sont dits indépendants lorsque : P (A ∩ B) = P(A) × P(B).
2	Pour tout nombre réel positif ou nul a, le nombre réel $a^{\frac{5}{4}}$ est égal à $\sqrt[5]{a^4}$.
3	Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ (avec $a < b$), et si $f(a) \times f(b) > 0$ alors l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]\,a\,;b[$.
4	Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I. S'il existe un nombre réel M tel que $\forall\, x \in I, \lvert f'(x)\rvert \leq M$, alors pour tous nombres réels a et b de I, on a : $\lvert f(b) - f(a)\rvert \leq M\lvert b - a\rvert$.

Exercice n°2 (2 points)

Pour chacun des énoncés incomplets suivants, trois réponses sont proposées dont une seule permet d'avoir l'énoncé exact. Ecris sur ta feuille de copie le numéro de l'énoncé incomplet suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

$N°$	ÉNONCÉS INCOMPLETS	RÉPONSES	
1	La fonction f dérivable sur IR et définie par $f(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$ a pour dérivée la fonction …	A	$x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}$.
		B	$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
		C	$x \longmapsto \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$.
2	Si f est une fonction dérivable en 1 telle que $f'(1) = -2$ et $f(1) = -1$, alors une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1 est …	A	$y = 2x + 1$.
		B	$y = -2x + 1$.
		C	$y = x - 3$.
3	Soit *E(X)* l'espérance mathématique d'une variable aléatoire *X* désignant le gain algébrique d'un joueur. Si $E(X) > 0$, alors …	A	le jeu est équitable.
		B	le jeu est désavantageux pour le joueur.
		C	le jeu est avantageux pour le joueur.
4	La fonction g définie sur $[0; 4[\, \cup\,]4; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ admet un prolongement par continuité en ...	A	4
		B	2
		C	$\frac{1}{4}$

Exercice n° 3 (4 points)

Soit $a \in]\frac{1}{2} ; 1[$ et les suites (u_n) et (v_n)) telles que :

$u_0 = 2$; $v_0 = 3$, $u_{n+1} = au_n + (1-a)v_n$ et $v_{n+1} = (1-a)u_n + av_n$.

1- Démontre par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n > 0$.

2- a- Démontre que la suite (u_n) est croissante.

b- Démontre que la suite (v_n) est décroissante.

c- Démontre que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3- Soit la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$.

a- Démontre que la suite (w_n) est une suite géométrique dont tu préciseras le premier terme et la raison.

b- Déduis - en que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4- Soit la suite (t_n) définie par $t_n = u_n + v_n$.

a- Démontre que la suite (t_n) est une suite constante.

b- Déduis en la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice n° 4 (3 points)

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que : $h(x) = \frac{x^3+2x^2-x+1}{(x+1)^2}$.

1) 1-a) Détermine l'ensemble de définition D de la fonction h.

1-b) Démontre que pour tout x appartenant à D : $h(x) = x - \frac{2}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$.

2) On admet que h est infiniment dérivable en tout x de D et on désigne par h'' sa dérivée seconde.

Détermine $h''(x)$ pour tout x appartenant à D.

3) 3-a) Détermine les primitives de la fonction h sur l'intervalle]-1 ;+∞[.

3-b) Trouve la primitive de h qui s'annule en 0.

Exercice n° 5 (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; I ; J) (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées).

1- Soit g une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c$, où a, b et c sont trois réels. Détermine a, b et c pour que la courbe représentative de g dans le repère (O ; I ; J) passe par les points A (1 ; 2), B (e ; 0) et C (e^2; 0).

2- Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2$.
On note Γ la courbe représentative de f dans le repère (O ;I ;J).

a. Justifie que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$. Interprète graphiquement ce résultat

b. Calcule la limite de f en +∞. On pourra remarquer que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a : $f(x) = (\ln x)(\ln x - 3) + 2$

3-

a- Démontre que : pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2lnx-3}{x}$ où f'désigne la dérivée de *f*.

b. Justifie que f est strictement décroissante sur $]0\,;\ e\sqrt{e}]$ et strictement croissante sur $[e\sqrt{e}\,;\ +\infty[$.

c. Dresse le tableau de variations de *f* sur $]0;+\infty[$.

4-.

a. Détermine une équation de la tangente (Δ) à la courbe (Γ) au point d'abscisse *e*.

b. Trace la courbe (Γ) et la tangente (Δ). *On admet que (Γ) coupe l'axe de abscisses aux points B (e ; 0) et C (e^2; 0).*

<u>Exercice n° 6 (5 points)</u>

Lors de la fête de fin d'année, une enquête faite par le conseil scolaire d'un lycée, avec un échantillon d'élèves de terminales C et D révèle que :

- 25% des élèves aiment jouer au damier sachant qu'ils sont de la terminale C ;
- un tiers des élèves aiment jouer au damier sachant qu'ils sont de la terminale D ;
- 3 élèves sur 10 aiment jouer au damier.

Lors de la rédaction de son rapport, le responsable des jeux et loisirs du conseil scolaire, se rend compte qu'il doit y mentionner la proportion d'élève de terminale D dans l'échantillon considéré. Ne sachant comment exploiter les données mise à sa disposition pour déterminer cette proportion, il sollicite ton aide.

A l'aide d'une production argumentée et basée sur tes connaissances mathématiques, détermine la proportion d'élève de terminale D dans l'échantillon considéré.

BARÈME ET CORRIGE DS RÉGIONAL TD

	CORRIGE	BARÈME
EX. 1	1V ;2F ;3F ;4V	0,5 x4
EX. 2	1-A ;2-B ;3-C ; 4-A	0,5 x4
EX. 3	1 Démonstration par récurrence correcte	0,25
	2 a) Démonstration	
	$u_{n+1} - u_n = (1-a)(v_n - u_n)$	0,25
	$u_{n+1} - u_n > 0$ (justification correcte) donc U_n est croissante	0,25
	2 b) $v_{n+1} - v_n = (a-1)(v_n - u_n)$......	0,25
	$v_{n+1} - v_n < 0$ (justification correcte) donc v_n est décroissante......	0,25
	2 c) Démontrons que les suites U_n et V_n sont convergentes	
	u_n est croissante et $v_n$est décroissante	
	$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n > 0$ donc $v_n > u_n$	
	• Comme U_n est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$ soit $u_n \geq 2$ par suite $v_n \geq 2$ car $v_n > u_n$.	0,25
	• Comme v_n est décroissante alors $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$,soit $v_n \leq 3$ par suite $u_n < 3$ car $u_n < v_n$.	0,25
	Ainsi u_n est croissante et majorée par 3 donc U_n est convergente......	0,25
	v_n est décroissante et minorée par 2 donc v_n est convergente......	0,25
	3a) Démontrons que $w_n$est une suite géométrique	
	$w_{n+1} = (2a-1)w_n$(Calcul correct) donc $w_n$est une suite géométrique	0,25
	w_0=1 , raison $q = 2a - 1$......	0,25
	3 b) Déduisons que $u_n et\ v_n$ ont la même limite	
	$\frac{1}{2} < a < 1$	
	1$< 2a < 2$	
	0$< 2a - 1 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$	0,25
	Comme u_n et v_n sont convergentes alors	
	$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	0,25
	4 a)Démontrons que la suite $t_n$est constante	
	$t_{n+1} - t_n = 0$ (calcul correct) donc t_n est constante......	0,25
	4 b)Déduisons les limites communes de $u_n et\ v_n$	
	Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	
	Comme t_n est constante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = t_0$ or $t_0 = v_0 + u_0 = 5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = 5.$	0,25
	Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5 \Rightarrow 2l = 5$	
	$\Rightarrow l = \frac{5}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{2}$......	0,25
EX. 4	1 a) D=$\mathbb{R} \setminus \{1\}$......	0,25
	1 b) Démonstration correcte	0,5
	2 Déterminons $h''(x)$	
	$h'(x) = 1 + \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{6}{(x+1)^3}$......	0,5
	$h''(x) = \frac{-4}{(x+1)^3} + \frac{18}{(x+1)^4}$......	0,5
	3 a)Déterminons une primitive de h sur $]-1;+\infty[$	
	$H(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + c$......	0,5
	3 b) Trouvons la primitive de h qui s'annule en 0	
	$H(0) = 0 \Leftrightarrow c = 3$......	0,50
	$H(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + 3$......	0,25
	1)Déterminons $a, b\ et\ c$	
	$a = 1; b = -3; c = 2$......	0,25
	2 a) Justification correcte de $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = +\infty$......	0,25
	$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (Γ)......	0,25

EX. 5

2 b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ 0,25

Justification correcte du calcul de la limite 0,25

3 a) Démonstration correcte 0,25

3 b)Justifions que $f$est strictement décroissante sur $]0; e\sqrt{e}[$ et strictement croissante $]e\sqrt{e}; +\infty[$

Signe de $f'(x)$

$\forall x \in]0\,;+\infty[, x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est de celui de $2lnx - 3$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2lnx - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x = e\sqrt{e}$.. 0,25

$\left.\begin{array}{l} 2lnx - 3 > 0 \;\Leftrightarrow x > e\sqrt{e} \\ 2lnx - 3 < 0 \;\Leftrightarrow 0 < x < e\sqrt{e} \end{array}\right\}$ 0,25

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \; x = e\sqrt{e} \\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > e\sqrt{e} \\ f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow 0 < x < e\sqrt{e} \end{array}\right\}$ 0,50

$\left.\begin{array}{l} f\text{est strictement croissante sur } [e\sqrt{e}; +\infty[\\ f\text{est strictement décroissante sur}]0; e\sqrt{e}] \end{array}\right\}$ 0,50

3 c) Tableau de variation 0,25

x	0		$e\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{-1}{4}$	↗ $+\infty$	

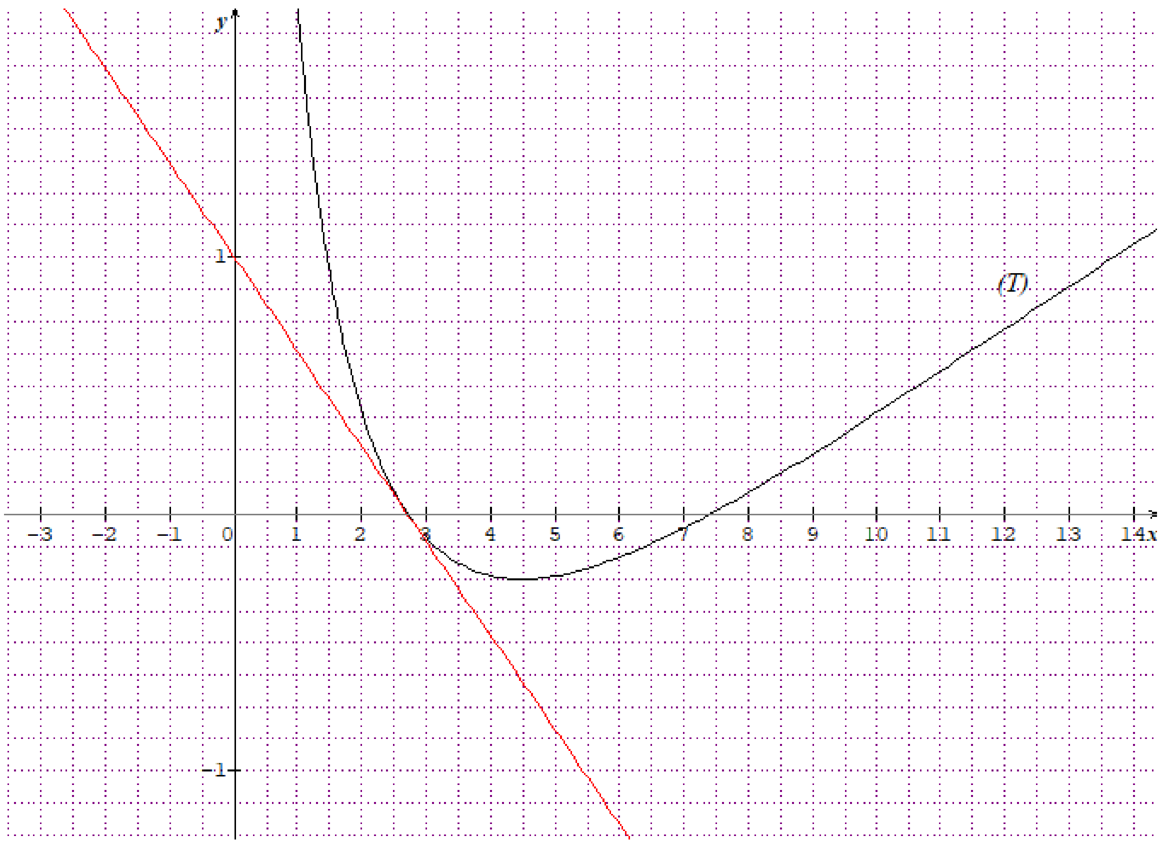
4 a) Équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0

$(\Delta): y = -\frac{1}{e}x + 1$.. 0,25

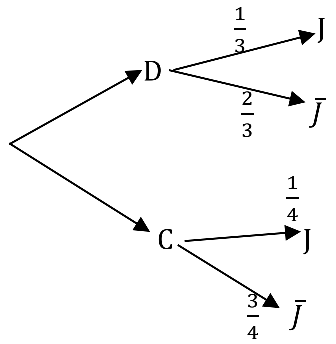
4 b) Construction de la courbe (Γ) et de la tangente (Δ)

(Γ).. 0,25

(Δ).. 0,25



EX. 6

Critères	Indicateurs	Barème
CM1 : **Pertinence**	- Pour résoudre le problème je vais faire des calculs de probabilité	**0,75 point**
CM2 : **Utilisation correcte des outils mathématiques en situation**	- Définition des évènements C « l'élève est de la terminale C » D « l'élève est de la terminale D » J « l'élève aime jouer au damier » - Réalisation d'un arbre pondéré  - Positionnement des probabilités conditionnelles sur l'arbre de probabilité - Calcul des probabilités $P(J)=\frac{3}{10}$ $P(J)=P(D)\times P_D(J)+P(C)\times P_C(J)$ $P(J)=\ P(D)\times\frac{1}{3}+P(C)\times\frac{1}{4}$ $P(C)=1-P(D)$ $P(J)=\ P(D)\times\frac{1}{3}+\times\frac{1}{4}(1-P(D))$ $P(J)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}P(D)$ $P(J)=\frac{3}{10}\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\frac{1}{12}P(D)=\frac{3}{10}$ $P(D)=\frac{3}{5}=0{,}6$ soit 60%. - La proportion d'élèves de terminale D dans l'échantillon est de 60%.	**2,5 points** $1\ ind/\ 5\rightarrow 0{,}5$ $2ind/5\rightarrow 1{,}25$ $3ind/5\rightarrow 2{,}5$
CM3 : **Cohérence de la réponse**	- Le résultat produit est conforme au résultat attendu (*des probabilités sont calculées*) - Le résultat produit est en adéquation avec la démarche (*formules sont juste même si le modèle est faux*) - La qualité des enchainements de la démarche	**1,25 points** $1\ ind/3\rightarrow 0{,}75$ $2\ ind/\ 3\rightarrow 1{,}25$
CP : **Critère de perfectionnement**	- Propreté de la production - Originalité - Concision	**0,5 point** $1\ ind/3\rightarrow 0{,}25$ $2\ ind\ /3\rightarrow 0{,}5$