Fomesoutra.com ça soutra!

Année-Scolaire :2023-2024

LYCÉE DE SAPAGA **Date** : 04/12/2023

Prof : M.TIORO **Durée** : 4h00

Classe : Tle. D **Coef** :05

COMPOSITION DU 1er TRIMESTRE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(Calculatrices non autorisées)

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : $2cm$.

1. Soit le nombre complexe $z_0 = 1 + i$
   (a) Montrer que z_0 est solution de l'équation (E) définie par $z^3 - (7+i)z^2 + 2(8+3i)z - 10(1+i) = 0$.
   (b) Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.
2. On considère les points A, B et C du plan , d'affixes respectives $1+i$; $3+i$; $3-i$.
   (a) Calculer et écrire sous forme exponentielle $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.
   (b) En déduire la nature du triangle ABC.
   (c) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et compléter la figure au fur et à mesure.
   (d) Soit (Γ) le cercle circonscrit au triangle BAC.
   Déterminer l'affixe du centre G et le rayon r du cercle.
3. Soit (Δ) l'ensemble des points M du plan d'affixe z vérifiant la relation $|z - 1 - i| = |z - 3 + i|$.
   (a) Caractériser géométriquement l'ensemble (Δ) .
   (b) Justifier que le point F d'affixe $4 + 2i$ appartient à (Δ).
   (c) Déterminer l'affixe du point E de (Δ) situé sur l'axe des ordonnées.
4. Quelle est la nature exacte du quadrilatère $CEAF$? Justifier votre réponse .

.

Exercice 2

1. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 - 8}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   (b) Démontrer que f admet en 2 un prolongement par continuité et définis ce prolongement.
   .

2. (a) Soit la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{1-x}$. Montrer que $\forall x \in]-\infty; 1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} - \dfrac{3}{2} \times \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

   (b) Donner une primitive G de la fonction g définie sur $]-\infty; 1[$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

   (c) Soit la fonction h définie sur $]-\infty; 1[$ par $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$. Exprimer $h(x)$ en fonction de $f'(x)$ et $g(x)$. En déduire la primitive H de la fonction h telle que $H(0) = -\dfrac{1}{3}$.

.

.

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ unité $2cm$. Le but de ce problème est l'étude de la fonction f et la résolution graphique d'une équation à partir de la courbe (C).

Partie A

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; +\infty[$.
3. Montrer que la solution unique α est telle que $2,19 < \alpha < 2,20$.
4. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

.

Partie B

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
2. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

   (b) En déduire le sens de variation et le tableau de variation de f.
3. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2-1}$.
   En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$ et en $-\infty$. Préciser son équation.

   (b) Étudier la position de (C) par rapport à (D). Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
4. Tracer (D) et (C) (de même que les autres asymptotes).
   Prendre $\alpha = 2,2$.

.

Partie C

1. Déterminer l'abscisse des points de la courbe (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$.
2. Déterminer une équation de chacune de ces tangentes et les tracer.
3. En déduire graphiquement suivant les valeurs de m , le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$.

BONNE INSPIRATION ! ! !