**Année-Scolaire** :2023-2024

**L.D.N.Z. DE ZITENGA** **Date** : /03/2024

**Prof :** M.OUATTARA **Durée** : 4h00

**Classe :** Tle. D **Coef** :05

# DEVOIR DE MATHÉMATIQUES

(Calculatrices non autorisées)

**EXERCICE 1 (5,5 pts)**

On définit pour tout entier naturel $n$ , les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ respectivement par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}(u_n)^2 \end{cases} \quad \text{et } v_n = ln\left(\frac{2}{3}u_n\right)$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n$ , $u_n > 0$ . **(1 pt)**
2. (a) Calculer $v_0$ . **(0,5 pt)**
   (b) Démontrer que $v_n$ est une suite géométrique de raison 2. **(1 pt)**
3. Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$ . **(1 pt)**
4. On pose : $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $S' = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$
   (a) Calculer $S$ en fonction de $n$. **(1 pt)**
   (b) Prouver que : $S' = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \times e^S$ puis exprimer $S'$ en fonction de $n$. **(1 pt)**

.

**EXERCICE 2 (3,5 pts)**

On considère l'équation différentielle : $y'' + 9y = 2cosx$ $(A)$.
On pose $y = z + kcosx$.

1. (a) $y$ étant une solution de $(A)$ . Déterminer $k$ pour que $z$ vérifie l'équation : $z'' + 9z = 0$ $(E)$. **(1 pt)**
   (b) Donner la solution générale de l'équation $E$. **(1 pt)**
2. (a) Donner la solution générale de l'équation $(A)$. **(1 pt)**
   (b) Trouver la solution particulière de $f$ de $(A)$ vérifiant : $f(0) = 0$ et $f'(\pi) = -3$. **(0,5 pt)**

.

**PROBLÈME (11 pts)**

**PARTIE A (3,25 pts)**

On considère la fonction $u$ définie par : $u(x) = x - 1 + ln|x|$.

1. Déterminer le domaine de définition $D_u$ de $u$. **(0,25 pt)**
2. Calculer les limites aux bornes de $D_u$. **(1 pt)**
3. Étudier les variations de $u$. **(1 pt)**
4. La fonction $u$ est-elle bijective sur $\mathbb{R}_-^*$ ? **(0,25 pt)**
5. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$ , l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ telle que $\alpha \in ]0,9; 1,1[$.**(0,5pt)**

6. Calculer l'image de 1 par $u$ puis donner le signe de $u(x)$ sur $D_u$. **(0,25 pt)**

.

**<u>PARTIE B</u> : (5,75 pts)**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x} ln|x|$. On désigne par $(C)$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unités graphiques $2cm$.

1. Déterminer le domaine de définition $D_f$ de $f$. **(0,25 pt)**
2. Calculer les limites aux bornes de $D_f$ . Donner si possible une interprétation graphique . **(1,25 pt)**
3. Etudier le sens de variation de $f$ puis dresser son tableau de variation. **(1 pt)**
4. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\beta$ sur $\mathbb{R}^*_-$. **(0,25 pt)**
   (b) Calculer l'image de $-1$ par $f$ puis donner le signe de $f(x)$ sur $D_f$. **(0,5 pt)**
   (c) En déduire la position relative de $(C)$ par rapport à l'axe des abscisses. **(0,5 pt)**
5. Calculer les limites de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et en $-\infty$ . Interpréter ces résultats. **(1 pt)**
6. Déterminer l'équation réduite de la tangente $(T)$ à $(C)$ au point d'ordonnées nul. **(0,5 pt)**
7. Construire $(T)$ et $(C)$. **(0,5 pt)**

.

**<u>PARTIE C</u> : (1,5 pts)**

Soit $h$ la restriction de $f$ à l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

1. Montrer que $h$ réalise une bijection de $I$ vers un intervalle $J$ à préciser. **(0,5 pt)**
2. Donner le sens de variation de $h^{-1}$ la bijection réciproque de $h$ puis dresser son tableau de variation . **(0,5 pt)**
3. Expliquer la construction de la courbe $(C^{-1})$ de $h^{-1}$ puis la construire dans le même repère. **(0,5 pt)**

.

**<u>PARTIE D</u> (1,5 pts)**

Soit $p$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $p(x) = -\dfrac{1}{2}(lnx)^2 + xlnx - x$.

1. Déterminer $p'(x)$ . Quelle remarque peut-on faire ? **(0,5 pt)**
2. Soit $\lambda$ un réel supérieur à 2 et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe $(C)$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.
   (a) En prenant $\lambda = 4$, hachurer la domaine concerné et calculer en $cm^2$ son aire. **(0,5 pt)**
   (b) Calculer en $cm^2$ $A(\lambda)$ et montrer que $A(\lambda)$ n'est pas définie lorsque $\lambda$ tend vers $+\infty$. **(0,5 pt)**

.

**Données :** $ln(0,9) = -0,2$ ; $ln(1,1) = 0,09$ ; $ln2 = 0,7$

---

**BONNE INSPIRATION ! ! !**